Desigualdades principales para la función sen

Objetivos. Demostrar que $|\operatorname{sen}(x)| \le |x|$ para cada x en $\mathbb{R}$ y que $|\operatorname{sen}(x)| \ge \frac{2}{\pi}|x|$ para cada x en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Identidad de Pitágoras. Para cada x en $\mathbb{R}$,

$$(\cos(x))^2 + (\operatorname{sen}(x))^2 = 1. \tag{1}$$

2. Cota superior constante. Para cada x en $\mathbb{R}$ se cumple la desigualdad

$$|\operatorname{sen}(x)| \le 1. \tag{2}$$

La desigualdad (2) se sigue fácilmente de la identidad (1). Notamos que la igualdad $|\operatorname{sen}(x)| = 1$ se alcanza en los puntos de la forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. La función seno cardinal (desnormalizada). La función $\operatorname{senc}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define mediante la regla

$$\operatorname{senc}(x) := \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

En el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ el denominador no se anula, por eso la función senc es continua en cada punto del conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Más aún, se sabe que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1, \tag{3}$$

por eso la función senc es continua en cada punto de su dominio.

4. Proposición (monotonía estricta de funciones con derivada estrictamente negativa). Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha < \beta$, y sea $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[\alpha, \beta]$, derivable en (α, β) y tal que $f'(x) < 0$ para cada $x \in (\alpha, \beta)$. Entonces f es estrictamente decreciente en $[\alpha, \beta]$.

Demostración. Esta proposición se sigue del Teorema de Valor Medio. □

5. Proposición (monotonía de la función seno cardinal en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$). La función senc es estrictamente decreciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Demostración. Calculemos la derivada de senc en el intervalo abierto $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\operatorname{senc}'(x) = \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2}.$$

Consideramos la función $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \coloneqq x\cos(x) - \operatorname{sen}(x).$$

Notamos que para cada x en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = \cos(x) - x\operatorname{sen}(x) - \cos(x) = -x\operatorname{sen}(x) < 0.$$

Por la Proposición 4 concluimos que f es estrictamente decreciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En particular, para cada $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f(x) < f(0) = 0.$$

Con consecuencia, $\operatorname{senc}'(x) < 0$ para cada x en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Otra vez aplicamos la Proposición 4 y obtenemos el resultado. □

6. Corolario (valores mínimo y máximo de la función seno cardinal en el invervalo de 0 a $\boldsymbol{\pi/2}$. Para cada x en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{2}{\pi} \le \operatorname{senc}(x) \le 1, \tag{4}$$

esto es,

$$\operatorname{senc}(x) \ge \frac{2}{\pi} \tag{5}$$

y

$$\operatorname{senc}(x) \le 1. \tag{6}$$

Demostración. En realidad, $\operatorname{senc}(0) = 1$ y $\operatorname{senc}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$. □

7. Corolario (acotación local inferior de la función seno por la función identidad). Para cada x en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\operatorname{sen}(x) \ge \frac{2}{\pi}x. \tag{7}$$

Más aún, para cada x en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$|\operatorname{sen}(x)| \ge \frac{2}{\pi}|x|. \tag{8}$$

Demostración. Para $x = 0$ se tiene una igualdad: $\operatorname{sen}(0) = \frac{2}{\pi}0$. Para x en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ la desigualdad (7) es otra forma de (5). La desigualdad (8) se obtiene de (7) por paridad. □

8. Acotación global superior de la función seno por la función identidad. Para cada x en $\mathbb{R}$,

$$|\operatorname{sen}(x)| \le |x|. \tag{9}$$

Demostración. Las funciones $x \mapsto |x|$ y $x \mapsto |\operatorname{sen}(x)|$ son pares, por eso es suficiente demostrar la desigualdad (9) para $x \ge 0$. Si $x \ge \frac{\pi}{2}$, entonces la desigualdad se verifica fácilmente con ayuda de (2):

$$|\operatorname{sen}(x)| \le 1 < x = |x|.$$

En el punto 0 tenemos una igualdad: $|\operatorname{sen}(0)| = 0 = |0|$. Consideremos el caso principal, cuando $0 < x \le \frac{\pi}{2}$, En este caso la desigualdad requerida se obtiene de (6). □