

Prueba de Schur para operadores integrales, versión simplificada

Dados dos espacios de medida (X, \mathcal{F}, μ) , (Y, \mathcal{G}, ν) y una función medible $K \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathbb{C})$, bajo ciertas suposiciones adicionales se puede definir el *operador integral* $A_K: L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(Y, \nu)$,

$$(A_K f)(x) := \int_Y K(x, y) f(y) d\nu(y). \quad (1)$$

Queremos demostrar una condición suficiente para que este operador esté bien definido y que sea acotado.

Objetivos. Demostrar una versión simplificada de la prueba de Schur que permite acotar operadores integrales en espacios L^2 .

Prerrequisitos. Funciones Lebesgue integrables, espacios L^p , teorema de Tonelli, desigualdad de Hölder, operadores lineales acotados.

1 Proposición. Sean (X, \mathcal{F}, μ) , (Y, \mathcal{G}, ν) espacios de medida σ -finita y sea $K \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathbb{C})$ tal que

$$C_1 := \sup_{x \in X} \int_Y |K(x, y)| d\nu(y) < +\infty, \quad C_2 := \sup_{y \in Y} \int_X |K(x, y)| d\mu(x) < +\infty.$$

Entonces se tienen las siguientes propiedades.

1. Para cada f en $L^2(Y, \nu)$ y μ -casi todo x en X ,

$$\int_Y |K(x, y)| |f(y)| d\nu(y) < +\infty. \quad (2)$$

2. Para cada f en $L^2(Y, \nu)$, la función $A_K f$, definida mediante la regla (1), pertenece al espacio $L^2(X, \mu)$.
3. El operador integral $A_K: L^2(Y, \nu) \rightarrow L^2(X, \mu)$, definido mediante la regla (1), es acotado, y $\|A_K\| \leq \sqrt{C_1 C_2}$.

Demostración. Primer paso. Sea $f \in L^2(Y, \nu)$. Denotemos la integral en (2) por $M_f(x)$. Para acotarla, aplicamos la desigualdad de Hölder con $p = 2$:

$$\begin{aligned} M_f(x) &= \int_Y \sqrt{|K(x, y)|} \sqrt{|K(x, y)|} |f(y)| \, d\nu(y) \\ &\leq \left(\int_Y |K(x, y)| \, d\nu(y) \right)^{1/2} \left(\int_Y |K(x, y)| |f(y)|^2 \, d\nu(y) \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{C_1} \left(\int_Y |K(x, y)| |f(y)|^2 \, d\nu(y) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Segundo paso. Integremos la función M_f^2 sobre X y apliquemos el teorema de Tonelli:

$$\begin{aligned} \int_X M_f(x)^2 \, d\mu(x) &\leq C_1 \int_X \int_Y |K(x, y)| |f(y)|^2 \, d\nu(y) \, d\mu(x) \\ &\leq C_1 \int_Y \left(\int_X |K(x, y)| \, d\mu(x) \right) |f(y)|^2 \, d\nu(y) \\ &\leq C_1 C_2 \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Tercer paso (conclusiones). Como $\int_X M_f^2 \, d\mu < +\infty$, concluimos que $M_f(x) < +\infty$ para μ -casi todo x en X . Esto implica que la función $A_K f$ está bien definida, salvo un conjunto de medida cero.

Usando la propiedad lineal de la integral, es fácil verificar que el operador A_K es lineal. Más aún, como $|(A_K f)(x)| \leq M_f(x)$, obtenemos que

$$\|(A_K f)\|_2^2 \leq C_1 C_2 \int_X M_f(x)^2 \, d\mu(x) \leq C_1 C_2 \|f\|_2^2.$$

Sacamos la raíz cuadrada de ambos lados de la desigualdad obtenida:

$$\|A_K f\|_2 \leq \sqrt{C_1 C_2} \|f\|_2.$$

Esta cota superior significa que A_K es acotado y $\|A_K\| \leq \sqrt{C_1 C_2}$. □

2 Ejercicio. Sean (X, \mathcal{F}, μ) , (Y, \mathcal{G}, ν) espacio de medida finita:

$$\mu(X) < +\infty, \quad \nu(Y) < +\infty,$$

y sea $K: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible y esencialmente acotada:

$$K \in \mathcal{L}^\infty(X \times Y, \mu \times \nu).$$

Demostrar que A_K es un operador lineal y encontrar una cota superior para su norma.