Funciones simples
(un tema de análisis real)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

20 de marzo de 2024

Objetivos.

- Definir la noción de función simple.
- Estudiar su representación canónica y representaciones generalizadas.
- Establecer un criterio de medibilidad para funciones simples.

Prerrequisitos.

- La imagen de una función. La preimagen de un conjunto bajo una función.
- La partición de un conjunto.
- La función indicadora (característica) de un conjunto.
- Funciones medibles.

La imagen de una función, repaso
(el conjunto de los valores de una función)

Sea $f: X \to Y$ una función.

$$f[X] \;:=$$

La imagen de una función, repaso
(el conjunto de los valores de una función)

Sea $f\colon X \to Y$ una función.

$$f[X] \;:=\; \left\{ y \in Y\colon\; \exists x \in X \quad f(x) = y \right\}.$$

La imagen de una función, repaso
(el conjunto de los valores de una función)

Sea $f\colon X \to Y$ una función.

$$f[X] \;:=\; \Big\{ y \in Y\colon\; \exists x \in X \quad f(x) = y \Big\}.$$

También se denota por $\operatorname{im}(f)$ o por $\mathcal{R}(f)$.

Función simple

Una función $f\colon X \to Y$ se llama simple si su imagen $f[X]$ es un conjunto finito.

Función simple

Una función $f\colon X \to Y$ se llama simple si su imagen $f[X]$ es un conjunto finito.

Denotamos por $\mathcal{S}(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones simples $X \to Y$.

Función simple

Una función $f\colon X \to Y$ se llama simple si su imagen $f[X]$ es un conjunto finito.

Denotamos por $\mathcal{S}(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones simples $X \to Y$.

Vamos a trabajar con funciones simples positivas, reales o complejas:

$$\mathcal{S}(X, [0, +\infty[\,), \qquad \mathcal{S}(X, \mathbb{R}), \qquad \mathcal{S}(X, \mathbb{C}).$$

Función simple

Una función $f\colon X \to Y$ se llama simple si su imagen $f[X]$ es un conjunto finito.

Denotamos por $\mathcal{S}(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones simples $X \to Y$.

Vamos a trabajar con funciones simples positivas, reales o complejas:

$$\mathcal{S}(X, [0, +\infty[\,), \qquad \mathcal{S}(X, \mathbb{R}), \qquad \mathcal{S}(X, \mathbb{C}).$$

En todos estos casos, vamos a suponer que los valores de f son números finitos.

Función simple

Una función $f\colon X \to Y$ se llama simple si su imagen $f[X]$ es un conjunto finito.

Denotamos por $\mathcal{S}(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones simples $X \to Y$.

Vamos a trabajar con funciones simples positivas, reales o complejas:

$$\mathcal{S}(X, [0, +\infty[\,), \qquad \mathcal{S}(X, \mathbb{R}), \qquad \mathcal{S}(X, \mathbb{C}).$$

En todos estos casos, vamos a suponer que los valores de f son números finitos.

Hablando de funciones simples, no permitimos los valores $+\infty$ ni $-\infty$.

Partición de un conjunto, repaso

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{Q} \subseteq 2^X$.

Se dice que $\mathcal{Q}$ es una partición de X, si se cumplen las siguientes condiciones.

Partición de un conjunto, repaso

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{Q} \subseteq 2^X$.

Se dice que $\mathcal{Q}$ es una partición de X, si se cumplen las siguientes condiciones.

1. $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{Q}} A = X.$
2. $\forall A, B \in \mathcal{Q} \qquad \big(A \neq B \quad \Longrightarrow \quad A \cap B = \varnothing\big).$
3. $\forall A \in \mathcal{Q} \qquad A \neq \varnothing.$

Partición de un conjunto, repaso

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{Q} \subseteq 2^X$.

Se dice que $\mathcal{Q}$ es una partición de X, si se cumplen las siguientes condiciones.

1. $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{Q}} A = X$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{Q} \qquad \big(A \neq B \qquad \Longrightarrow \qquad A \cap B = \varnothing\big)$.
3. $\forall A \in \mathcal{Q} \qquad A \neq \varnothing$.

Si no se pide la última condición, entonces decimos que $\mathcal{Q}$ es una partición generalizada.

Lista de conjuntos que forma una partición de un conjunto

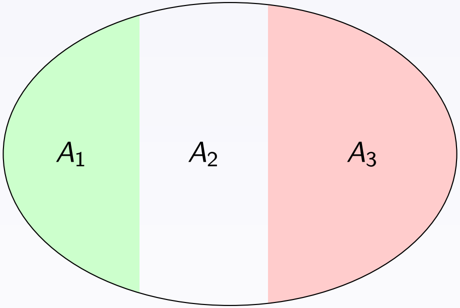
Sea X un conjunto y sean $A_1, \ldots, A_m \subseteq X$.

Decimos que $(A_1, \ldots, A_m)$ es una partición de X si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{m} A_j = X$.
2. $\forall j, k \in \{1, \ldots, m\} \quad j \neq k \qquad \Longrightarrow \qquad A_j \cap A_k = \varnothing$.
3. $\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad A_j \neq \varnothing$.

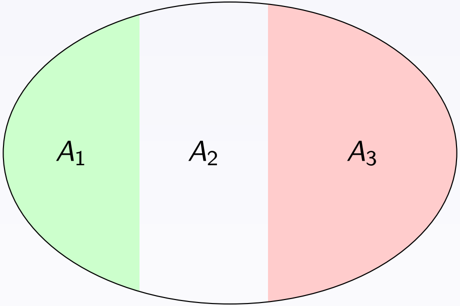
Sin pedir la última condición, la lista $(A_1, \ldots, A_m)$ es una partición generalizada de X.

La representación canónica de una función simple



$$f(x) = \begin{cases} 6, & x \in A_1; \\ -4, & x \in A_2; \\ 5, & x \in A_3. \end{cases}$$

La representación canónica de una función simple



$$f(x) = \begin{cases} 6, & x \in A_1; \\ -4, & x \in A_2; \\ 5, & x \in A_3. \end{cases}$$

$$f = 6 \cdot \mathbb{1}_{A_1} - 4 \cdot \mathbb{1}_{A_2} + 5 \cdot \mathbb{1}_{A_3}.$$

La representación canónica de una función simple

Proposición

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ *una función simple y sean* $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$ *números diferentes a pares tales que*

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}.$$

Definimos $A_1, \ldots, A_m$ *de la siguiente manera:*

$$A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Entonces $(A_1, \ldots, A_m)$ *es una partición de* X*, y*

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que

$$X = \bigcup_{j=1}^{m} A_j.$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares,} \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que

$$X = \bigcup_{j=1}^{m} A_j.$$

Sea $x \in X$.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que

$$X = \bigcup_{j=1}^{m} A_j.$$

Sea $x \in X$.

Como $f(x) \in f[X]$,

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que

$$X = \bigcup_{j=1}^{m} A_j.$$

Sea $x \in X$.

Como $f(x) \in f[X]$, existe j en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $f(x) = v_j$.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que

$$X = \bigcup_{j=1}^{m} A_j.$$

Sea $x \in X$.

Como $f(x) \in f[X]$, existe j en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $f(x) = v_j$.

Luego $x \in A_j$.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que los conjuntos $A_1, \ldots, A_m$ son disjuntos a pares.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares,} \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que los conjuntos $A_1, \ldots, A_m$ son disjuntos a pares.

Sean $j, k \in \{1, \ldots, m\}$ tales que $j \neq k$. Demostremos que $A_j \cap A_k = \varnothing$.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que los conjuntos $A_1, \ldots, A_m$ son disjuntos a pares.

Sean $j, k \in \{1, \ldots, m\}$ tales que $j \neq k$. Demostremos que $A_j \cap A_k = \varnothing$.

Sea $x \in A_j \cap A_k$.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que los conjuntos $A_1, \ldots, A_m$ son disjuntos a pares.

Sean $j, k \in \{1, \ldots, m\}$ tales que $j \neq k$. Demostremos que $A_j \cap A_k = \varnothing$.

Sea $x \in A_j \cap A_k$. Entonces $f(x) = v_j$ y $f(x) = v_k$.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que los conjuntos $A_1, \ldots, A_m$ son disjuntos a pares.

Sean $j, k \in \{1, \ldots, m\}$ tales que $j \neq k$. Demostremos que $A_j \cap A_k = \varnothing$.

Sea $x \in A_j \cap A_k$. Entonces $f(x) = v_j$ y $f(x) = v_k$.
Esto contradice a la suposición que $v_1, \ldots, v_m$ son diferentes a pares.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}, \qquad v_1, \dots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que los conjuntos $A_1, \ldots, A_m$ son no vacíos.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que los conjuntos $A_1, \ldots, A_m$ son no vacíos.

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Mostremos que $A_j \neq \varnothing$.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que los conjuntos $A_1, \ldots, A_m$ son no vacíos.

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Mostremos que $A_j \neq \varnothing$.

Como $v_j \in f[X]$, encontramos x en X tal que $f(x) = v_j$.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que los conjuntos $A_1, \ldots, A_m$ son no vacíos.

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Mostremos que $A_j \neq \varnothing$.

Como $v_j \in f[X]$, encontramos x en X tal que $f(x) = v_j$. Luego $x \in A_j$.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que $\displaystyle f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que $\quad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$

Sea $x \in X$. Encontramos k en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $f(x) = v_k$.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que $\quad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}$.

Sea $x \in X$. Encontramos k en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $f(x) = v_k$. Entonces $x \in A_k$ y

$$\mathbb{1}_{A_j}(x)$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que $\quad f = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$

Sea $x \in X$. Encontramos k en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $f(x) = v_k$. Entonces $x \in A_k$ y

$$\mathbb{1}_{A_j}(x) =$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que $\quad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$

Sea $x \in X$. Encontramos k en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $f(x) = v_k$. Entonces $x \in A_k$ y

$$\mathbb{1}_{A_j}(x) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k; \end{cases}$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que $f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}$.

Sea $x \in X$. Encontramos k en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $f(x) = v_k$. Entonces $x \in A_k$ y

$$\mathbb{1}_{A_j}(x) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k; \end{cases} \qquad \text{esto es,}$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que $\quad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$

Sea $x \in X$. Encontramos k en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $f(x) = v_k$. Entonces $x \in A_k$ y

$$\mathbb{1}_{A_j}(x) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k; \end{cases} \qquad \text{esto es,} \qquad \mathbb{1}_{A_j}(x) = \delta_{j,k}.$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que $\displaystyle f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$

Sea $x \in X$. Encontramos k en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $f(x) = v_k$. Entonces $x \in A_k$ y

$$\mathbb{1}_{A_j}(x) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k; \end{cases} \qquad \text{esto es,} \qquad \mathbb{1}_{A_j}(x) = \delta_{j,k}.$$

Luego

$$\sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}(x)$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que $\quad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$

Sea $x \in X$. Encontramos k en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $f(x) = v_k$. Entonces $x \in A_k$ y

$$\mathbb{1}_{A_j}(x) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k; \end{cases} \qquad \text{esto es}, \qquad \mathbb{1}_{A_j}(x) = \delta_{j,k}.$$

Luego

$$\sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}(x) =$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que $\quad f = \sum_{j=1}^{m} v_j\, \mathbb{1}_{A_j}.$

Sea $x \in X$. Encontramos k en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $f(x) = v_k$. Entonces $x \in A_k$ y

$$\mathbb{1}_{A_j}(x) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k; \end{cases} \qquad \text{esto es,} \qquad \mathbb{1}_{A_j}(x) = \delta_{j,k}.$$

Luego

$$\sum_{j=1}^{m} v_j\, \mathbb{1}_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^{m} v_j\, \delta_{j,k}$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que $\quad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$

Sea $x \in X$. Encontramos k en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $f(x) = v_k$. Entonces $x \in A_k$ y

$$\mathbb{1}_{A_j}(x) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k; \end{cases} \qquad \text{esto es}, \qquad \mathbb{1}_{A_j}(x) = \delta_{j,k}.$$

Luego

$$\sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \delta_{j,k} =$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que $\quad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$

Sea $x \in X$. Encontramos k en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $f(x) = v_k$. Entonces $x \in A_k$ y

$$\mathbb{1}_{A_j}(x) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k; \end{cases} \qquad \text{esto es}, \qquad \mathbb{1}_{A_j}(x) = \delta_{j,k}.$$

Luego

$$\sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \delta_{j,k} = v_k$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}, \qquad v_1, \dots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que $\quad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$

Sea $x \in X$. Encontramos k en $\{1, \dots, m\}$ tal que $f(x) = v_k$. Entonces $x \in A_k$ y

$$\mathbb{1}_{A_j}(x) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k; \end{cases} \qquad \text{esto es,} \qquad \mathbb{1}_{A_j}(x) = \delta_{j,k}.$$

Luego

$$\sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \delta_{j,k} = v_k =$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \qquad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostremos que $\quad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$

Sea $x \in X$. Encontramos k en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $f(x) = v_k$. Entonces $x \in A_k$ y

$$\mathbb{1}_{A_j}(x) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k; \end{cases} \qquad \text{esto es}, \qquad \mathbb{1}_{A_j}(x) = \delta_{j,k}.$$

Luego

$$\sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \delta_{j,k} = v_k = f(x).$$

Definición de una función simple por medio de una representación canónica

Proposición

Sea X un conjunto, sea $(A_1, \ldots, A_m)$ una partición de X
y sean $v_1, \ldots, v_m$ algunos números diferentes a pares.
Definimos $f\colon X \to \mathbb{C}$,

$$f := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$$

Entonces $f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}$, $f \in \mathcal{S}(X, \mathbb{C})$, y

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad A_j = f^{-1}[\{v_j\}].$$

Ejercicio: demostrar la proposición.

Resumen

f es simple $\iff$ f se puede escribir como

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j},$$

donde

Resumen

f es simple $\quad\Longleftrightarrow\quad$ f se puede escribir como

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j},$$

donde $(A_1, \ldots, A_m)$ es una partición de X, $\quad v_1, \ldots, v_m$ son números diferentes a pares.

Ejemplo

Consideramos la función $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{sgn}[\mathbb{R}] =$

Ejemplo

Consideramos la función $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{sgn}[\mathbb{R}] = \{-1, 0, 1\}$,

$$A_1 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{-1\}]$$

Ejemplo

Consideramos la función $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{sgn}[\mathbb{R}] = \{-1, 0, 1\}$,

$$A_1 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{-1\}] =$$

Ejemplo

Consideramos la función $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{sgn}[\mathbb{R}] = \{-1, 0, 1\}$,

$$A_1 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{-1\}] = \,]-\infty, 0[\,,$$

Ejemplo

Consideramos la función $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{sgn}[\mathbb{R}] = \{-1, 0, 1\}$,

$$A_1 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{-1\}] = \,]-\infty, 0[\,, \quad A_2 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{0\}]$$

Ejemplo

Consideramos la función $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{sgn}[\mathbb{R}] = \{-1, 0, 1\}$,

$$A_1 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{-1\}] = \,]-\infty, 0[\,, \quad A_2 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{0\}] =$$

Ejemplo

Consideramos la función $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{sgn}[\mathbb{R}] = \{-1, 0, 1\}$,

$$A_1 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{-1\}] = \,]-\infty, 0[\,, \quad A_2 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{0\}] = \{0\},$$

Ejemplo

Consideramos la función $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{sgn}[\mathbb{R}] = \{-1, 0, 1\}$,

$$A_1 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{-1\}] = \;]-\infty, 0[\,, \quad A_2 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{0\}] = \{0\}, \quad A_3 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{1\}]$$

Ejemplo

Consideramos la función $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{sgn}[\mathbb{R}] = \{-1, 0, 1\}$,

$$A_1 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{-1\}] = \,]-\infty, 0[\,, \quad A_2 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{0\}] = \{0\}, \quad A_3 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{1\}] =$$

Ejemplo

Consideramos la función $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{sgn}[\mathbb{R}] = \{-1, 0, 1\}$,

$$A_1 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{-1\}] = \,]-\infty, 0[\,, \quad A_2 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{0\}] = \{0\}, \quad A_3 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{1\}] = \,]0, +\infty[\,.$$

Ejemplo

Consideramos la función $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{sgn}[\mathbb{R}] = \{-1, 0, 1\}$,

$$A_1 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{-1\}] = \left]-\infty, 0\right[, \quad A_2 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{0\}] = \{0\}, \quad A_3 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{1\}] = \left]0, +\infty\right[.$$

Luego

$$\operatorname{sgn}$$

Ejemplo

Consideramos la función $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{sgn}[\mathbb{R}] = \{-1, 0, 1\}$,

$$A_1 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{-1\}] = \left]-\infty, 0\right[, \quad A_2 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{0\}] = \{0\}, \quad A_3 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{1\}] = \left]0, +\infty\right[.$$

Luego

$$\operatorname{sgn} =$$

Ejemplo

Consideramos la función $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{sgn}[\mathbb{R}] = \{-1, 0, 1\}$,

$$A_1 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{-1\}] = \left]-\infty, 0\right[, \quad A_2 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{0\}] = \{0\}, \quad A_3 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{1\}] = \left]0, +\infty\right[.$$

Luego

$$\operatorname{sgn} = (-1)\mathbb{1}_{A_1} + 0\mathbb{1}_{A_2} + 1\mathbb{1}_{A_3}$$

Ejemplo

Consideramos la función $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{sgn}[\mathbb{R}] = \{-1, 0, 1\}$,

$$A_1 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{-1\}] = \,]-\infty, 0[\,, \quad A_2 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{0\}] = \{0\}, \quad A_3 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{1\}] = \,]0, +\infty[\,.$$

Luego

$$\operatorname{sgn} = (-1)\mathbb{1}_{A_1} + 0\mathbb{1}_{A_2} + 1\mathbb{1}_{A_3} =$$

Ejemplo

Consideramos la función $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{sgn}[\mathbb{R}] = \{-1, 0, 1\}$,

$$A_1 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{-1\}] = \left]-\infty, 0\right[, \quad A_2 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{0\}] = \{0\}, \quad A_3 = \operatorname{sgn}^{-1}[\{1\}] = \left]0, +\infty\right[.$$

Luego

$$\operatorname{sgn} = (-1)\mathbb{1}_{A_1} + 0\mathbb{1}_{A_2} + 1\mathbb{1}_{A_3} = -\mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_3}.$$

Ejemplo

Sea X un conjunto y sea (A_1, A_2, A_3, A_4) una partición del conjunto X. Consideramos $f\colon X \to \mathbb{R}$,

$$f := -3\mathbb{1}_{A_1} + 4\mathbb{1}_{A_2} + 5\mathbb{1}_{A_3} + 8\mathbb{1}_{A_4}.$$

Ejemplo

Sea X un conjunto y sea (A_1, A_2, A_3, A_4) una partición del conjunto X.
Consideramos $f\colon X \to \mathbb{R}$,

$$f := -3\mathbb{1}_{A_1} + 4\mathbb{1}_{A_2} + 5\mathbb{1}_{A_3} + 8\mathbb{1}_{A_4}.$$

Entonces

$$f[X]$$

Ejemplo

Sea X un conjunto y sea (A_1, A_2, A_3, A_4) una partición del conjunto X.

Consideramos $f\colon X \to \mathbb{R}$,

$$f := -3\mathbb{1}_{A_1} + 4\mathbb{1}_{A_2} + 5\mathbb{1}_{A_3} + 8\mathbb{1}_{A_4}.$$

Entonces

$$f[X] =$$

Ejemplo

Sea X un conjunto y sea (A_1, A_2, A_3, A_4) una partición del conjunto X.
Consideramos $f\colon X \to \mathbb{R}$,

$$f := -3\mathbb{1}_{A_1} + 4\mathbb{1}_{A_2} + 5\mathbb{1}_{A_3} + 8\mathbb{1}_{A_4}.$$

Entonces

$$f[X] = \{-3, 4, 5, 8\}.$$

Sea $W = [2, 7]$. Entonces

$$f^{-1}[W] =$$

Ejemplo

Sea X un conjunto y sea (A_1, A_2, A_3, A_4) una partición del conjunto X.
Consideramos $f\colon X \to \mathbb{R}$,

$$f := -3\mathbb{1}_{A_1} + 4\mathbb{1}_{A_2} + 5\mathbb{1}_{A_3} + 8\mathbb{1}_{A_4}.$$

Entonces

$$f[X] = \{-3, 4, 5, 8\}.$$

Sea $W = [2, 7]$. Entonces

$$f^{-1}[W] = A_2 \cup A_3.$$

La preimagen de un conjunto respecto una función simple

Proposición

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ *una función simple tal que*

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{A_j},$$

donde $(A_1, \ldots, A_m)$ *es una partición de* X, $\quad v_1, \ldots, v_m$ *son números diferentes a pares.*

Sea $W \subseteq \mathbb{C}$*. Entonces*

$$f^{-1}[W]$$

La preimagen de un conjunto respecto una función simple

Proposición

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ *una función simple tal que*

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{A_j},$$

donde $(A_1, \ldots, A_m)$ *es una partición de* X, $\quad v_1, \ldots, v_m$ *son números diferentes a pares.*

Sea $W \subseteq \mathbb{C}$*. Entonces*

$$f^{-1}[W] =$$

La preimagen de un conjunto respecto una función simple

Proposición

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ *una función simple tal que*

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{A_j},$$

donde $(A_1, \ldots, A_m)$ *es una partición de* X, $\quad v_1, \ldots, v_m$ *son números diferentes a pares.*

Sea $W \subseteq \mathbb{C}$. *Entonces*

$$f^{-1}[W] = \bigcup_{\substack{j \in \{1,\ldots,m\} \\ v_j \in W}} A_j.$$

La preimagen de un conjunto respecto una función simple

Proposición

Sea $f : X \to \mathbb{C}$ *una función simple tal que*

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{A_j},$$

donde $(A_1, \ldots, A_m)$ *es una partición de* X, $\quad v_1, \ldots, v_m$ *son números diferentes a pares.*

Sea $W \subseteq \mathbb{C}$. *Entonces*

$$f^{-1}[W] = \bigcup_{\substack{j \in \{1,\ldots,m\} \\ v_j \in W}} A_j.$$

Ejercicio: demostrar la proposición.

Criterio de medibilidad de una función simple

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F})$ *un espacio medible y sea* $f : X \to \mathbb{C}$ *una función simple, tal que*

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j},$$

donde $(A_1, \ldots, A_m)$ *es una partición de* X, $\quad v_1, \ldots, v_m$ *son números diferentes a pares.*
Entonces

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \qquad \iff$$

Criterio de medibilidad de una función simple

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F})$ *un espacio medible y sea* $f\colon X \to \mathbb{C}$ *una función simple, tal que*

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j},$$

donde $(A_1, \ldots, A_m)$ *es una partición de* X, $\quad v_1, \ldots, v_m$ *son números diferentes a pares.*
Entonces

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{F}.$$

Demostración: ejercicio

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$$

Por demostrar:

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \qquad \Longleftrightarrow$$

Demostración: ejercicio

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$$

Por demostrar:

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{F}.$$

Sugerencias.

Demostración: ejercicio

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$$

Por demostrar:

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{F}.$$

Sugerencias.

$\Longrightarrow$. Sea $k \in \{1, \ldots, m\}$. Escribir A_k como la preimagen de cierto conjunto boreliano en $\mathbb{C}$.

Demostración: ejercicio

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$$

Por demostrar:

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{F}.$$

Sugerencias.

$\Longrightarrow$. Sea $k \in \{1, \ldots, m\}$. Escribir A_k como la preimagen de cierto conjunto boreliano en $\mathbb{C}$.

$\Longleftarrow$. Dado $W \subseteq \mathbb{C}$, encontrar $f^{-1}[W]$.

Demostración: ejercicio

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{A_j}.$$

Por demostrar:

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{F}.$$

Sugerencias.

$\Longrightarrow$. Sea $k \in \{1, \ldots, m\}$. Escribir A_k como la preimagen de cierto conjunto boreliano en $\mathbb{C}$.

$\Longleftarrow$. Dado $W \subseteq \mathbb{C}$, encontrar $f^{-1}[W]$.

$\Longleftarrow$, otro camino. Mostrar que $\mathbb{1}_{A_1}, \ldots, \mathbb{1}_{A_m} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Función simple dada por una representación generalizada, ejemplo

Sea X un conjunto y sea $A_1, \ldots, A_6$ una partición generalizada de X.

$$C_1 \neq \varnothing, \qquad C_2 = \varnothing, \qquad C_3 \neq \varnothing, \qquad C_4 \neq \varnothing, \qquad C_5 = \varnothing, \qquad C_6 \neq \varnothing.$$

$$w_1 = -5, \qquad w_2 = 6, \qquad w_3 = -5, \qquad w_4 = 8, \qquad w_5 = -5, \qquad w_6 = 8.$$

Función simple dada por una representación generalizada, ejemplo

Sea X un conjunto y sea $A_1, \ldots, A_6$ una partición generalizada de X.

$$C_1 \neq \varnothing, \qquad C_2 = \varnothing, \qquad C_3 \neq \varnothing, \qquad C_4 \neq \varnothing, \qquad C_5 = \varnothing, \qquad C_6 \neq \varnothing.$$

$$w_1 = -5, \qquad w_2 = 6, \qquad w_3 = -5, \qquad w_4 = 8, \qquad w_5 = -5, \qquad w_6 = 8.$$

Consideramos

$$f := -5\mathbb{1}_{C_1} + 6\mathbb{1}_{C_2} - 5\mathbb{1}_{C_3} + 8\mathbb{1}_{C_4} - 5\mathbb{1}_{C_5} + 8\mathbb{1}_{C_6}.$$

Función simple dada por una representación generalizada, ejemplo

Sea X un conjunto y sea $A_1, \ldots, A_6$ una partición generalizada de X.

$$C_1 \neq \varnothing, \qquad C_2 = \varnothing, \qquad C_3 \neq \varnothing, \qquad C_4 \neq \varnothing, \qquad C_5 = \varnothing, \qquad C_6 \neq \varnothing.$$

$$w_1 = -5, \qquad w_2 = 6, \qquad w_3 = -5, \qquad w_4 = 8, \qquad w_5 = -5, \qquad w_6 = 8.$$

Consideramos

$$f := -5\mathbb{1}_{C_1} + 6\mathbb{1}_{C_2} - 5\mathbb{1}_{C_3} + 8\mathbb{1}_{C_4} - 5\mathbb{1}_{C_5} + 8\mathbb{1}_{C_6}.$$

En este ejemplo

$$f[X] =$$

Función simple dada por una representación generalizada, ejemplo

Sea X un conjunto y sea $A_1, \ldots, A_6$ una partición generalizada de X.

$$C_1 \neq \varnothing, \qquad C_2 = \varnothing, \qquad C_3 \neq \varnothing, \qquad C_4 \neq \varnothing, \qquad C_5 = \varnothing, \qquad C_6 \neq \varnothing.$$

$$w_1 = -5, \qquad w_2 = 6, \qquad w_3 = -5, \qquad w_4 = 8, \qquad w_5 = -5, \qquad w_6 = 8.$$

Consideramos

$$f := -5\mathbb{1}_{C_1} + 6\mathbb{1}_{C_2} - 5\mathbb{1}_{C_3} + 8\mathbb{1}_{C_4} - 5\mathbb{1}_{C_5} + 8\mathbb{1}_{C_6}.$$

En este ejemplo

$$f[X] = \{-5, 8\}, \qquad A_1 := f^{-1}[\{-5\}] =$$

Función simple dada por una representación generalizada, ejemplo

Sea X un conjunto y sea $A_1, \ldots, A_6$ una partición generalizada de X.

$$C_1 \neq \varnothing, \qquad C_2 = \varnothing, \qquad C_3 \neq \varnothing, \qquad C_4 \neq \varnothing, \qquad C_5 = \varnothing, \qquad C_6 \neq \varnothing.$$

$$w_1 = -5, \qquad w_2 = 6, \qquad w_3 = -5, \qquad w_4 = 8, \qquad w_5 = -5, \qquad w_6 = 8.$$

Consideramos

$$f := -5\mathbb{1}_{C_1} + 6\mathbb{1}_{C_2} - 5\mathbb{1}_{C_3} + 8\mathbb{1}_{C_4} - 5\mathbb{1}_{C_5} + 8\mathbb{1}_{C_6}.$$

En este ejemplo

$$f[X] = \{-5, 8\}, \qquad A_1 := f^{-1}[\{-5\}] = C_1 \cup C_3,$$

Función simple dada por una representación generalizada, ejemplo

Sea X un conjunto y sea $A_1, \ldots, A_6$ una partición generalizada de X.

$$C_1 \neq \varnothing, \qquad C_2 = \varnothing, \qquad C_3 \neq \varnothing, \qquad C_4 \neq \varnothing, \qquad C_5 = \varnothing, \qquad C_6 \neq \varnothing.$$

$$w_1 = -5, \qquad w_2 = 6, \qquad w_3 = -5, \qquad w_4 = 8, \qquad w_5 = -5, \qquad w_6 = 8.$$

Consideramos

$$f := -5\mathbb{1}_{C_1} + 6\mathbb{1}_{C_2} - 5\mathbb{1}_{C_3} + 8\mathbb{1}_{C_4} - 5\mathbb{1}_{C_5} + 8\mathbb{1}_{C_6}.$$

En este ejemplo

$$f[X] = \{-5, 8\}, \qquad A_1 := f^{-1}[\{-5\}] = C_1 \cup C_3, \qquad A_2 := f^{-1}[\{8\}] =$$

Función simple dada por una representación generalizada, ejemplo

Sea X un conjunto y sea $A_1, \ldots, A_6$ una partición generalizada de X.

$$C_1 \neq \varnothing, \qquad C_2 = \varnothing, \qquad C_3 \neq \varnothing, \qquad C_4 \neq \varnothing, \qquad C_5 = \varnothing, \qquad C_6 \neq \varnothing.$$

$$w_1 = -5, \qquad w_2 = 6, \qquad w_3 = -5, \qquad w_4 = 8, \qquad w_5 = -5, \qquad w_6 = 8.$$

Consideramos

$$f := -5\mathbb{1}_{C_1} + 6\mathbb{1}_{C_2} - 5\mathbb{1}_{C_3} + 8\mathbb{1}_{C_4} - 5\mathbb{1}_{C_5} + 8\mathbb{1}_{C_6}.$$

En este ejemplo

$$f[X] = \{-5, 8\}, \qquad A_1 := f^{-1}[\{-5\}] = C_1 \cup C_3, \qquad A_2 := f^{-1}[\{8\}] = C_4 \cup C_6.$$

Función simple dada por una representación generalizada, ejemplo

Sea X un conjunto y sea $A_1, \ldots, A_6$ una partición generalizada de X.

$$C_1 \neq \varnothing, \qquad C_2 = \varnothing, \qquad C_3 \neq \varnothing, \qquad C_4 \neq \varnothing, \qquad C_5 = \varnothing, \qquad C_6 \neq \varnothing.$$

$$w_1 = -5, \qquad w_2 = 6, \qquad w_3 = -5, \qquad w_4 = 8, \qquad w_5 = -5, \qquad w_6 = 8.$$

Consideramos

$$f := -5\mathbb{1}_{C_1} + 6\mathbb{1}_{C_2} - 5\mathbb{1}_{C_3} + 8\mathbb{1}_{C_4} - 5\mathbb{1}_{C_5} + 8\mathbb{1}_{C_6}.$$

En este ejemplo

$$f[X] = \{-5, 8\}, \qquad A_1 := f^{-1}[\{-5\}] = C_1 \cup C_3, \qquad A_2 := f^{-1}[\{8\}] = C_4 \cup C_6.$$

Representación canónica de f: $\qquad f = -5\mathbb{1}_{B_1 \cup B_3} + 8\mathbb{1}_{B_4 \cup B_6}.$

Función simple dada por una representación no canónica

Proposición

Sea X *un conjunto, sea* $(C_1, \ldots, C_p)$ *una partición generalizada de* X*, y sean* $w_1, \ldots, w_p \in \mathbb{C}$*.*

Definimos $f \colon X \to \mathbb{C}$*,*

$$f := \sum_{k=1}^{p} w_k \mathbb{1}_{C_k}.$$

Entonces f *es simple y* $\quad f[X] = \{y \in \mathbb{C} \colon \quad \exists k \in \{1, \ldots, p\} \quad y = w_k,\ C_k \neq \varnothing\}.$

Si $v_1, \ldots, v_m$ *son todos los elementos diferentes de* $f[X]$*, entonces*

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{A_j}, \qquad \text{donde} \qquad A_j = f^{-1}[\{v_j\}] =$$

Función simple dada por una representación no canónica

Proposición

Sea X un conjunto, sea $(C_1, \ldots, C_p)$ una partición generalizada de X, y sean $w_1, \ldots, w_p \in \mathbb{C}$.

Definimos $f \colon X \to \mathbb{C}$,

$$f := \sum_{k=1}^{p} w_k \mathbb{1}_{C_k}.$$

Entonces f es simple y $\quad f[X] = \{y \in \mathbb{C} \colon \quad \exists k \in \{1, \ldots, p\} \quad y = w_k,\ C_k \neq \varnothing\}.$

Si $v_1, \ldots, v_m$ son todos los elementos diferentes de $f[X]$, entonces

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{A_j}, \qquad \text{donde} \qquad A_j = f^{-1}[\{v_j\}] = \bigcup_{\substack{1 \le k \le p \\ w_k = v_j}} C_k.$$

Idea de demostración

$$f = \sum_{k=1}^{p} w_k \mathbb{1}_{C_k}.$$

Paso 1. Si $q \in \{1, \ldots, p\}$, $x \in C_q$, entonces $f(x) =$

Idea de demostración

$$f = \sum_{k=1}^{p} w_k \mathbb{1}_{C_k}.$$

Paso 1. Si $q \in \{1, \ldots, p\}$, $x \in C_q$, entonces $f(x) = w_q$.

Paso 2. $f[X] = \{y \in \mathbb{C}\colon \quad \exists k \in \{1, \ldots, p\} \quad y = w_k,\ C_k \neq \varnothing\} \subseteq \{w_1, \ldots, w_p\}$.

Paso 3. Numeramos todos los elementos diferentes de $f[X]$:

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}.$$

Idea de demostración

$$f = \sum_{k=1}^{p} w_k \mathbb{1}_{C_k}.$$

Paso 1. Si $q \in \{1, \ldots, p\}$, $x \in C_q$, entonces $f(x) = w_q$.

Paso 2. $f[X] = \{y \in \mathbb{C}\colon \quad \exists k \in \{1, \ldots, p\} \quad y = w_k,\ C_k \neq \varnothing\} \ \subseteq \{w_1, \ldots, w_p\}$.

Paso 3. Numeramos todos los elementos diferentes de $f[X]$:

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}.$$

Paso 4. Demostrar que

$$f^{-1}[\{v_j\}] = \bigcup_{\substack{1 \le k \le p \\ w_k = v_j}} C_k.$$