Sigma-álgebras

Objetivos. Definir la noción de σ-álgebra y estudiar sus propiedades básicas.

Requisitos. Operaciones con conjuntos, operaciones con familias de conjuntos.

1 Definición (conjunto potencia, conjunto de los subconjuntos)**.** Dado un conjunto X, denotemos por 2^X al conjunto de todos los subconjuntos de X:

$$2^X := \big\{Y\colon\ Y \subseteq X\big\}.$$

Otra notación: $\mathcal{P}(X)$.

2 Definición (σ-álgebra)**.** Sea X un conjunto. Un conjunto $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ se llama *σ-álgebra* sobre X, si cumple con las siguientes condiciones.

(S1) $\varnothing \in \mathcal{F}$.

(S2) $\mathcal{F}$ es cerrado bajo complementos: si $A \in \mathcal{F}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

(S3) $\mathcal{F}$ es cerrado bajo uniones numerables: si $A_j \in \mathcal{F}$ para cada j en $\mathbb{N}$ y $B = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

La condición (S3) se puede escribir de manera más formal:

$$\forall (A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}} \qquad \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F}.$$

3 Proposición (propiedades elementales de σ-álgebras)**.** *Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X. Entonces:*

1. $X \in \mathcal{F}$.

2. *$\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones numerables:*
   si $A_j \in \mathcal{F}$ para cada j en $\mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F}$.

3. *$\mathcal{F}$ es cerrada bajo uniones finitas:*
   si $A_j \in \mathcal{F}$ para cada j en $\{1, \ldots, m\}$, entonces $\bigcup_{j=1}^m A_j \in \mathcal{F}$.

4. *$\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones finitas:*
   si $A_j \in \mathcal{F}$ para cada j en $\{1, \ldots, m\}$, entonces $\bigcap_{j=1}^m A_j \in \mathcal{F}$.

5. *$\mathcal{F}$ es cerrada bajo la operación de diferencia de conjuntos:*
   si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{F}$.

Demostración. Ejercicio. $\square$

Ejemplos de σ-álgebras

4 Ejemplo (conjunto potencia). Sea X un conjunto. Entonces 2^X es una σ-álgebra sobre X.

5 Proposición (propiedades de conjuntos finitos o numerables, repaso). *Recuerde cómo se demuestran las siguientes proposiciones:*

- *Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos a lo más numerables. Entonces la unión $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ también es un conjunto a lo más numerable.*
- *Sea B un conjunto a lo más numerable y sea $C \subseteq B$. Entonces C también es a lo más numerable.*

6 Ejemplo (subconjuntos a lo más numerables y sus complementos). Sea X un conjunto no numerable. Denotemos por $\mathcal{N}$ al conjunto de todos los subconjuntos finitos o numerables de X:

$$\mathcal{N} := \big\{Y \subseteq X\colon\ Y \text{ es finito o numerable}\big\}.$$

Denotemos por $\mathcal{F}$ al conjunto que consiste de todos los subconjuntos finitos o numerables de X y todos los subconjuntos de X cuyos complementos son finitos o numerables:

$$\mathcal{F} := \big\{Y \subseteq X\colon\ Y \in \mathcal{N} \ \vee\ X \setminus Y \in \mathcal{N}\big\}.$$

Entonces $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

Indicación acerca de la demostración. En la demostración de la propiedad (S3) hay que considerar dos casos: 1) para cada k en $\mathbb{N}$, $A_k \in \mathcal{N}$; 2) existe j en $\mathbb{N}$ tal que $X \setminus A_j \in \mathcal{N}$. □