Sigma-álgebras

Objetivos. Definir la noción de σ-álgebra y estudiar sus propiedades básicas.

Requisitos. Operaciones con conjuntos, operaciones con familias de conjuntos.

1. Notación (conjunto potencia, conjunto de los subconjuntos). Sea X un conjunto. Entonces denotemos por 2^X al conjunto de todos los subconjuntos de X.

2. Definición ($\boldsymbol{\sigma}$-álgebra). Sea X un conjunto. Un conjunto $\mathcal{F} \subset 2^X$ se llama *σ-álgebra* sobre X si cumple con las siguientes condiciones:

1. $X \in \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ es cerrado bajo complementos: si $A \in \mathcal{F}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{F}$.
3. $\mathcal{F}$ es cerrado bajo uniones numerables: si $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

3. Propiedades elementales de $\boldsymbol{\sigma}$-álgebras. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X. Entonces:

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones numerables:
   si $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.
3. $\mathcal{F}$ es cerrada bajo uniones finitas:
   si $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, entonces $\bigcup_{i=1}^m A_i \in \mathcal{F}$.
4. $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones finitas:
   si $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, entonces $\bigcap_{i=1}^m A_i \in \mathcal{F}$.
5. $\mathcal{F}$ es cerrada bajo la operación de diferencia de conjuntos:
   si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{F}$.

Ejemplos de $\boldsymbol{\sigma}$-álgebras

4. Ejemplo de una $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra: conjunto potencia. Sea X un conjunto. Entonces 2^X es una σ-álgebra sobre X.

5. Propiedades de conjuntos finitos o numerables (repaso). Recuerde cómo se demuestran las siguientes proposiciones:

- Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos a lo más numerables. Entonces la unión $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ también es un conjunto a lo más numerable.
- Sea B un conjunto a lo más numerable y sea $C \subset B$. Entonces que C también es a lo más numerable.

6. Ejemplo de una $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra: subconjuntos a lo más numerables y sus complementos. Sea X un conjunto no numerable. Denotemos por $\mathcal{N}$ al conjunto de todos los subconjuntos finitos o numerables de X:

$$\mathcal{N} := \big\{ Y \subset X \colon\; Y \text{ es finito o numerable} \big\}.$$

Denotemos por $\mathcal{F}$ al conjunto que consiste en todos los subconjuntos finitos o numerables de X y todos los subconjuntos de X cuyos complementos son finitos o numerables:

$$\mathcal{F} := \big\{ Y \subset X \colon\; Y \in \mathcal{N} \;\vee\; Y^c \in \mathcal{N} \big\}.$$

Entonces $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

Indicación acerca de la demostración. En la demostración de la propiedad 3 hay que considerar dos casos: 1) $A_i \in \mathcal{N}$ para todo $i \in \mathbb{N}$; 2) $A_j^c \in \mathcal{N}$ para algún $j \in \mathbb{N}$. $\square$