La sigma-álgebra generada por un conjunto de conjuntos (un tema de análisis real)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

21 de febrero de 2024

Objetivos:

- demostrar que la intersección de un conjunto de σ-álgebras es una σ-álgebra;
- definir la σ-álgebra generada por un conjunto de conjuntos;
- considerar algunos ejemplos.

Prerrequisitos:

- definición de σ-álgebra;
- el concepto de la intersección de un conjunto de conjuntos;
- la estructura de los subconjuntos abiertos de la recta real.

La intersección de un conjunto de conjuntos (repaso)

Sea Ψ un conjunto de conjuntos, $\Psi \neq \emptyset$.

$$\cap\Psi := \{t\colon \quad \forall C \in \Psi \quad t \in C\}.$$

Otra notación:

$$\bigcap_{C\in\Psi} C.$$

La intersección de un conjunto de sigma-álgebras es una sigma-álgebra

Proposición

Sea X *un conjunto y sea* Ψ *un conjunto de* σ*-álgebras sobre* X*,* $\Psi \neq \emptyset$*. Pongamos*

$$\mathcal{F} := \cap\Psi,$$

esto es,

$$\mathcal{F} \; := \; \{Y \subseteq X\colon \quad \forall \mathcal{A} \in \Psi \qquad Y \in \mathcal{A}\}.$$

Entonces $\mathcal{F}$ *es una* σ*-álgebra sobre* X*.*

Demostración incompleta

Demostremos que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo las uniones numerables.

Demostración incompleta

Demostremos que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo las uniones numerables.

Sea $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$.

Demostración incompleta

Demostremos que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo las uniones numerables.

Sea $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. Pongamos $C := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$.

Demostración incompleta

Demostremos que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo las uniones numerables.

Sea $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. Pongamos $C := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$.

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad B_j \in \mathcal{F};$$

Demostración incompleta

Demostremos que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo las uniones numerables.

Sea $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. Pongamos $C := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$.

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad B_j \in \mathcal{F};$$

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad \forall \mathcal{A} \in \Psi \qquad B_j \in \mathcal{A};$$

Demostración incompleta

Demostremos que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo las uniones numerables.

Sea $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. Pongamos $C := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$.

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad B_j \in \mathcal{F};$$

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad \forall \mathcal{A} \in \Psi \qquad B_j \in \mathcal{A};$$

$$\forall \mathcal{A} \in \Psi \qquad \forall j \in \mathbb{N} \qquad B_j \in \mathcal{A};$$

Demostración incompleta

Demostremos que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo las uniones numerables.

Sea $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. Pongamos $C := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$.

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad B_j \in \mathcal{F};$$

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad \forall \mathcal{A} \in \Psi \qquad B_j \in \mathcal{A};$$

$$\forall \mathcal{A} \in \Psi \qquad \forall j \in \mathbb{N} \qquad B_j \in \mathcal{A};$$

$$\forall \mathcal{A} \in \Psi \qquad C \in \mathcal{A};$$

Demostración incompleta

Demostremos que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo las uniones numerables.

Sea $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. Pongamos $C := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$.

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad B_j \in \mathcal{F};$$

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad \forall \mathcal{A} \in \Psi \qquad B_j \in \mathcal{A};$$

$$\forall \mathcal{A} \in \Psi \qquad \forall j \in \mathbb{N} \qquad B_j \in \mathcal{A};$$

$$\forall \mathcal{A} \in \Psi \qquad C \in \mathcal{A};$$

$$C \in \mathcal{F}.$$

Ejercicio.

Completar la demostración.

La sigma-álgebra generada por un conjunto de conjuntos

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{G} \subseteq 2^X$.

La sigma-álgebra generada por un conjunto de conjuntos

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{G} \subseteq 2^X$.

$$\Psi \coloneqq \Big\{ \mathcal{A} \subseteq 2^X : \quad \mathcal{A} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra} \quad \wedge \quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A} \Big\}.$$

La sigma-álgebra generada por un conjunto de conjuntos

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{G} \subseteq 2^X$.

$$\Psi \coloneqq \Big\{ \mathcal{A} \subseteq 2^X \colon \quad \mathcal{A} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra} \quad \wedge \quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A} \Big\}.$$

Notemos que $2^X \in \Psi$, así que $\Psi \neq \emptyset$.

La sigma-álgebra generada por un conjunto de conjuntos

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{G} \subseteq 2^X$.

$$\Psi := \Big\{ \mathcal{A} \subseteq 2^X \colon \quad \mathcal{A} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra} \quad \wedge \quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A} \Big\}.$$

Notemos que $2^X \in \Psi$, así que $\Psi \neq \emptyset$.

$$\mathcal{F} := \cap \Psi = \bigcap_{\mathcal{A} \in \Psi} \mathcal{A} = \{ Y \subseteq X \colon \quad \forall \mathcal{A} \in \Psi \quad Y \in \mathcal{A} \}.$$

La sigma-álgebra generada por un conjunto de conjuntos

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{G} \subseteq 2^X$.

$$\Psi := \Big\{ \mathcal{A} \subseteq 2^X : \quad \mathcal{A} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra} \quad \wedge \quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A} \Big\}.$$

Notemos que $2^X \in \Psi$, así que $\Psi \neq \emptyset$.

$$\mathcal{F} := \cap \Psi = \bigcap_{\mathcal{A} \in \Psi} \mathcal{A} = \{ Y \subseteq X : \quad \forall \mathcal{A} \in \Psi \quad Y \in \mathcal{A} \}.$$

Entonces:

- $\mathcal{F} \in \Psi$, por la proposición anterior;

La sigma-álgebra generada por un conjunto de conjuntos

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{G} \subseteq 2^X$.

$$\Psi := \left\{ \mathcal{A} \subseteq 2^X : \quad \mathcal{A} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra} \quad \wedge \quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A} \right\}.$$

Notemos que $2^X \in \Psi$, así que $\Psi \neq \emptyset$.

$$\mathcal{F} := \cap\Psi = \bigcap_{\mathcal{A}\in\Psi} \mathcal{A} = \{ Y \subseteq X : \quad \forall \mathcal{A} \in \Psi \quad Y \in \mathcal{A} \}.$$

Entonces:

- $\mathcal{F} \in \Psi$, por la proposición anterior;
- $\mathcal{F}$ es el elemento mínimo de Ψ.

La sigma-álgebra generada por un conjunto de conjuntos

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{G} \subseteq 2^X$.

$$\Psi := \left\{ \mathcal{A} \subseteq 2^X : \quad \mathcal{A} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra} \quad \wedge \quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A} \right\}.$$

Notemos que $2^X \in \Psi$, así que $\Psi \neq \emptyset$.

$$\mathcal{F} := \cap \Psi = \bigcap_{\mathcal{A} \in \Psi} \mathcal{A} = \{ Y \subseteq X : \quad \forall \mathcal{A} \in \Psi \quad Y \in \mathcal{A} \}.$$

Entonces:

- $\mathcal{F} \in \Psi$, por la proposición anterior;
- $\mathcal{F}$ es el elemento mínimo de Ψ.

$\mathcal{F}$ se llama la σ-álgebra generada por $\mathcal{G}$.

La realidad triste de análisis real

En general, la σ-álgebra $\mathcal{F}$ generada por $\mathcal{G}$ no tiene descripción simple.

En otras palabras, dado un conjunto $A \subseteq X$, no es fácil determinar si $A \in \mathcal{F}$ o $A \notin \mathcal{F}$.

Ejemplo muy simple

$X = \{1,2,3\}$, $\mathcal{G} = \{\{1,2\}\}$. Consideremos

$$\mathcal{F} := \Big\{\emptyset,\ \{1,2\},\ \{3\},\ X\Big\}.$$

Mostremos que $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra generada por $\mathcal{G}$.

I. Primero, verifiquemos que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra. $\emptyset \in \mathcal{F}$.

A	A^c
$\emptyset$	X
$\{1,2\}$	$\{3\}$
$\{3\}$	$\{1,2\}$
X	$\emptyset$

$\cup$	$\emptyset$	$\{1,2\}$	$\{3\}$	X
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1,2\}$	$\{3\}$	X
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	X	X
$\{3\}$	$\{3\}$	X	$\{3\}$	X
X	X	X	X	X

Ejemplo muy simple, continuación

$X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{G} = \{\{1, 2\}\}$,

$$\mathcal{F} := \Big\{\emptyset,\ \{1, 2\},\ \{3\},\ X\Big\}.$$

II. Mostremos que $\mathcal{F}$ es la mínima entre todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{G}$.

Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$.

Entonces:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- $X \in \mathcal{A}$, porque $X = \emptyset^c$ y $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $\{1, 2\} \in \mathcal{A}$, porque $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ y $\{1, 2\} \in \mathcal{G}$;
- $\{3\} \in \mathcal{A}$, porque $\{3\} = \{1, 2\}^c$ y $\{1, 2\} \in \mathcal{A}$.

Hemos mostrado que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$.

La σ-álgebra generada por los subconjuntos unipuntuales de un conjunto no numerable

Ejercicio.

Sea X un conjunto no numerable y sea $\mathcal{G}$ el conjunto de los subconjuntos unipuntuales de X:

$$\mathcal{G} := \Big\{ \{t\} : \ t \in X \Big\}.$$

Describir la σ-álgebra $\mathcal{F}$ generada por $\mathcal{G}$.

La σ-álgebra de Borel de un espacio topológico

Definición.

Sea (X, τ) un espacio topológico.

La σ-álgebra $\mathcal{B}_\tau$ generada por la topología τ se llama la σ-álgebra de Borel.

Los elementos de $\mathcal{B}$ se llaman conjuntos borelianos.

Cuando se considera un espacio topológico X con una topología conocida,
se escribe $\mathcal{B}_X$ en vez de $\mathcal{B}_\tau$.

Ejercicio.

Sea X un conjunto, sean $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subseteq 2^X$, $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$.

$\mathcal{F}_1 :=$ la σ-álgebra generada por $\mathcal{G}_1$,

$\mathcal{F}_2 :=$ la σ-álgebra generada por $\mathcal{G}_2$.

Demostrar que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$.

La sigma-álgebra de Borel del eje real se genera por la colección de los rayos derechos

Proposición

La σ-álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ está generada por

$$\Big\{ \,]a, +\infty[\, : \quad a \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Personajes del cuento:

$\tau_{\mathbb{R}}$ es la topología de $\mathbb{R}$;

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es la σ-álgebra generada por $\tau_{\mathbb{R}}$;

$\mathcal{G} := \Big\{]a, +\infty[\ : \ a \in \mathbb{R} \Big\}$;

$\mathcal{F} :=$ la σ-álgebra generada por $\mathcal{G}$.

Por demostrar:

$$\mathcal{F} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Personajes del cuento:

$\tau_{\mathbb{R}}$ es la topología de $\mathbb{R}$;

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es la σ-álgebra generada por $\tau_{\mathbb{R}}$;

$\mathcal{G} := \Big\{]a, +\infty[\; : \; a \in \mathbb{R} \Big\}$;

$\mathcal{F} :=$ la σ-álgebra generada por $\mathcal{G}$.

Por demostrar:

$$\mathcal{F} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Como $\mathcal{G} \subseteq \tau_{\mathbb{R}}$, tenemos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Demostración: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$

1. $[b, +\infty[\, =$

Demostración: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$

1. $[b, +\infty[= \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left] b - \frac{1}{n}, +\infty \right[\in \mathcal{F}.$

Demostración: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$

1. $[b, +\infty[= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]b - \frac{1}{n}, +\infty\right[\in \mathcal{F}.$
2. $]a, b[=$

Demostración: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$

1. $[b,+\infty[= \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]b-\frac{1}{n},+\infty\right[\in \mathcal{F}.$
2. $]a,b[=]a,+\infty[\setminus [b,+\infty[\in \mathcal{F}.$

Demostración: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$

1. $[b, +\infty[= \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left] b - \frac{1}{n}, +\infty \right[\in \mathcal{F}$.
2. $]a, b[=]a, +\infty[\setminus [b, +\infty[\in \mathcal{F}$.
3. Sea $A \in \tau_{\mathbb{R}}$. Sabemos que existen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tales que

$$A =$$

Demostración: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$

1. $[b, +\infty[= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]b - \frac{1}{n}, +\infty\right[\in \mathcal{F}$.
2. $]a, b[= \ ]a, +\infty[\setminus [b, +\infty[\in \mathcal{F}$.
3. Sea $A \in \tau_{\mathbb{R}}$. Sabemos que existen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tales que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[\,.$$

Demostración: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$

1. $[b, +\infty[= \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left] b - \frac{1}{n}, +\infty \right[\in \mathcal{F}$.
2. $]a, b[=]a, +\infty[\setminus [b, +\infty[\in \mathcal{F}$.
3. Sea $A \in \tau_{\mathbb{R}}$. Sabemos que existen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tales que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[\,.$$

Por lo tanto, $A \in \mathcal{F}$.

Demostración: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$

1. $[b, +\infty[= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]b - \frac{1}{n}, +\infty\right[\in \mathcal{F}$.
2. $]a, b[= \,]a, +\infty[\setminus [b, +\infty[\in \mathcal{F}$.
3. Sea $A \in \tau_{\mathbb{R}}$. Sabemos que existen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tales que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[\, .$$

   Por lo tanto, $A \in \mathcal{F}$.
4. $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra tal que $\tau_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$;
   $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es la mínima entre las σ-álgebras que contienen $\tau_{\mathbb{R}}$.
   Por lo tanto, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$.