# La sigma-álgebra generada
# por un conjunto de conjuntos

**Objetivos.** Definir la noción de $\sigma$-álgebra generada por un conjunto de conjuntos. Definir la $\sigma$-álgebra de Borel de un espacio topológico. Demostrar que la $\sigma$-álgebra de Borel de la recta real se genera por el conjunto de los rayos derechos abiertos.

**Requisitos.** La definición de $\sigma$-álgebra. La estructura de los subconjuntos abiertos de la recta real.

## La sigma-álgebra generada por un conjunto de conjuntos

**1. Proposición (intersección de un conjunto de $\boldsymbol{\sigma}$-álgebras es una $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra).** Sea $\Psi$ un conjunto de $\sigma$-álgebras sobre $X$. Denotemos por $\mathcal{H}$ a la intersección de las $\sigma$-álgebras pertenecientes a $\Psi$:

$$\mathcal{H} \coloneqq \bigcap_{\mathcal{A}\in\Psi} \mathcal{A} = \big\{ Y \subset X : \quad \forall \mathcal{A} \in \Psi \quad Y \in \mathcal{A} \big\}.$$

Entonces $\mathcal{H}$ es una $\sigma$-álgebra sobre $X$.

*Demostración incompleta.* Probemos solamente que $\mathcal{H}$ es cerrada bajo uniones numerables. Sea $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ y sea

$$C \coloneqq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ tenemos que $B_j \in \mathcal{H}$. Por la construcción de $\mathcal{H}$ esto significa que

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad \forall \mathcal{A} \in \Psi \qquad B_j \in \mathcal{A}.$$

Podemos intercambiar el orden de cuantificadores $\forall$:

$$\forall \mathcal{A} \in \Psi \qquad \forall j \in \mathbb{N} \qquad B_j \in \mathcal{A}.$$

En otras palabras, para cada $\mathcal{A} \in \Psi$ la sucesión $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ toma valores en $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es una $\sigma$-álgebra, esto implica que $C \in \mathcal{A}$. Recordando que $\mathcal{A} \in \Psi$ era arbitraria concluimos que $C \in \mathcal{H}$. $\square$

**2. Proposición (sigma-álgebra generada por un conjunto de subconjuntos de $\boldsymbol{X}$).** Sea $\mathcal{G} \subset 2^X$. Entonces existe una única $\sigma$-álgebra $\mathcal{F}$ que contiene $\mathcal{G}$ y es mínima entre todas las $\sigma$-álgebras que contienen $\mathcal{G}$:

1. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

2. Si $\mathcal{H}$ es una $\sigma$-álgebra sobre $X$ y $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$, entonces $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$.

Se dice que $\mathcal{F}$ es la *$\sigma$-álgebra generada por* $\mathcal{G}$.

*Demostración.* Denotemos por $\Psi$ al conjunto de todas las $\sigma$-álgebras sobre $X$ que contienen a $\mathcal{G}$:

$$\Psi \coloneqq \{\mathcal{A} \subset 2^X: \quad \mathcal{A} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra} \quad \wedge \quad \mathcal{G} \subset \mathcal{A}\}.$$

Definimos $\mathcal{F}$ como la intersección de los elementos de $\Psi$:

$$\mathcal{F} \coloneqq \cap\Psi = \bigcap_{\mathcal{A}\in\Psi} \mathcal{A}.$$

En otras palabras, $\mathcal{F}$ consiste de todos aquellos subconjuntos de $X$ que pertenecen a cualquier $\sigma$-álgebra que contiene a $\mathcal{G}$.

Por la Proposición 1, $\mathcal{F}$ es una $\sigma$-álgebra sobre $X$. Si $Y \in \mathcal{G}$, entonces $Y \in \mathcal{A}$ para cualquier $\mathcal{A} \in \Psi$ y por lo tanto $Y \in \mathcal{F}$. Hemos demostrado que $\mathcal{F} \in \Psi$. De la definición de intersección se sigue que si $\mathcal{H} \in \Psi$, entonces $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es el elemento mínimo de $\Psi$. $\square$

**3. Ejercicio: $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra generada por los subconjuntos unipuntuales de un conjunto no numerable.** Sea $X$ un conjunto no numerable y sea $\mathcal{G}$ el conjunto de los subconjuntos unipuntuales de $X$:

$$\mathcal{G} \coloneqq \big\{\{t\}: \ t \in X\big\}.$$

Describa la $\sigma$-álgebra $\mathcal{F}$ generada por $\mathcal{G}$. Indicación: determine qué conjuntos se obtienen de los conjuntos unipuntuales al aplicar las operaciones de $\sigma$-álgebra.

**4. Definición ($\boldsymbol{\sigma}$-álgebra de Borel de un espacio topológico).** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. La $\sigma$-álgebra $\mathcal{B}$ generada por la topología $\tau$ se llama la *$\sigma$-álgebra de Borel*. En esta situación los elementos de $\mathcal{B}$ se llaman *conjuntos de Borel* o *conjuntos borelianos*.

## Generadores de la sigma-álgebra de Borel del eje real

**5. Proposición (la sigma-álgebra de Borel del eje real está generada por los rayos derechos).** La $\sigma$-álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ está generada por $\{(a,+\infty)\colon a \in \mathbb{R}\}$.

*Demostración.* Denotemos por $\mathcal{F}$ a la $\sigma$-álgebra generada por

$$\mathcal{G} = \{(a,+\infty)\colon a \in \mathbb{R}\}.$$

1. $[b,+\infty) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(b - \frac{1}{n}, +\infty\right) \in \mathcal{F}$.

2. $(a,b) = (a,+\infty) \setminus [b,+\infty) \in \mathcal{F}$.

3. Sea $A$ un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Se sabe que $A$ se puede representar como la unión de una sucesión de intervalos de la forma $(a_n, b_n)$, donde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $A \in \mathcal{F}$.

4. $\mathcal{F}$ es una $\sigma$-álgebra que contiene a la topología $\tau$ de $\mathbb{R}$, y $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es la mínima $\sigma$-álgebra con esta propiedad. Por lo tanto $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{F}$.

5. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es una $\sigma$-álgebra que contiene a $\mathcal{G}$, y $\mathcal{F}$ es la mínima $\sigma$-álgebra con esta propiedad. Por lo tanto $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. □

**6. Proposición (la sigma-álgebra de Borel del eje real extendido está generada por los rayos derechos).** La $\sigma$-álgebra $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ está generada por $\{(a,+\infty]\colon a \in \mathbb{R}\}$.