La sigma-álgebra generada por un conjunto de conjuntos

Objetivos. Definir la noción de σ-álgebra generada por un conjunto de conjuntos. Definir la σ-álgebra de Borel de un espacio topológico. Demostrar que la σ-álgebra de Borel de la recta real se genera por el conjunto de los rayos derechos abiertos.

Requisitos. La definición de σ-álgebra. El concepto de la intersección de un conjunto de conjuntos. La estructura de los subconjuntos abiertos de la recta real.

La sigma-álgebra generada por un conjunto de conjuntos

1 Proposición (la intersección de un conjunto de σ-álgebras es una σ-álgebra)**.** *Sea Ψ un conjunto de σ-álgebras sobre X. Denotemos por $\mathcal{H}$ a la intersección de las σ-álgebras pertenecientes a Ψ:*

$$\mathcal{H} := \bigcap_{\mathcal{A}\in\Psi} \mathcal{A} = \big\{ Y \subseteq X : \quad \forall \mathcal{A} \in \Psi \quad Y \in \mathcal{A} \big\}.$$

Entonces $\mathcal{H}$ es una σ-álgebra sobre X.

Demostración incompleta. Probemos solamente que $\mathcal{H}$ es cerrada bajo uniones numerables. Sea $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ y sea

$$C := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ tenemos que $B_j \in \mathcal{H}$. Por la construcción de $\mathcal{H}$ esto significa que

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad \forall \mathcal{A} \in \Psi \qquad B_j \in \mathcal{A}.$$

Podemos intercambiar el orden de cuantificadores $\forall$:

$$\forall \mathcal{A} \in \Psi \qquad \forall j \in \mathbb{N} \qquad B_j \in \mathcal{A}.$$

En otras palabras, para cada $\mathcal{A} \in \Psi$ la sucesión $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ toma valores en $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, esto implica que $C \in \mathcal{A}$. Recordando que $\mathcal{A} \in \Psi$ era arbitraria concluimos que $C \in \mathcal{H}$. $\square$

2 Proposición (la σ-álgebra generada por un conjunto de subconjuntos de X)**.** *Sea $\mathcal{G} \subseteq 2^X$. Entonces existe una única σ-álgebra $\mathcal{F}$ que contiene $\mathcal{G}$ y es mínima entre todas las σ-álgebras que contienen $\mathcal{G}$:*

1. *$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.*

2. *Si $\mathcal{H}$ es una σ-álgebra sobre X y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$, entonces $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$.*

Se dice que $\mathcal{F}$ *es la* σ-álgebra generada por $\mathcal{G}$.

Demostración. Denotemos por Ψ al conjunto de todas las σ-álgebras sobre X que contienen a $\mathcal{G}$:

$$\Psi \coloneqq \{\mathcal{A} \subseteq 2^X\colon \quad \mathcal{A} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra} \quad \wedge \quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}\}.$$

Definimos $\mathcal{F}$ como la intersección de los elementos de Ψ:

$$\mathcal{F} \coloneqq \cap\Psi = \bigcap_{\mathcal{A}\in\Psi} \mathcal{A}.$$

En otras palabras, $\mathcal{F}$ consiste de todos aquellos subconjuntos de X que pertenecen a cualquier σ-álgebra que contiene a $\mathcal{G}$.

Por la Proposición 1, $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre X. Si $Y \in \mathcal{G}$, entonces $Y \in \mathcal{A}$ para cualquier $\mathcal{A} \in \Psi$ y por lo tanto $Y \in \mathcal{F}$. Hemos demostrado que $\mathcal{F} \in \Psi$. De la definición de intersección se sigue que si $\mathcal{H} \in \Psi$, entonces $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es el elemento mínimo de Ψ. □

3 Ejercicio (la σ-álgebra generada por los subconjuntos unipuntuales de un conjunto no numerable)**.** Sea X un conjunto no numerable y sea $\mathcal{G}$ el conjunto de los subconjuntos unipuntuales de X:

$$\mathcal{G} \coloneqq \big\{\{t\}\colon\ t \in X\big\}.$$

Describa la σ-álgebra $\mathcal{F}$ generada por $\mathcal{G}$. Indicación: determine qué conjuntos se obtienen de los conjuntos unipuntuales al aplicar las operaciones de σ-álgebra.

4 Definición (la σ-álgebra de Borel de un espacio topológico)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico. La σ-álgebra $\mathcal{B}$ generada por la topología τ se llama la *σ-álgebra de Borel*. En esta situación los elementos de $\mathcal{B}$ se llaman *conjuntos de Borel* o *conjuntos borelianos*.

Generadores de la sigma-álgebra de Borel del eje real

5 Proposición (expresión de rayos abiertos izquierdos como unión de una sucesión de rayos cerrados izquierdos)**.** *Sea* $b \in \mathbb{R}$. *Entonces*

$$(-\infty, b) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(-\infty, b - \frac{1}{k}\right].$$

Demostración. Pongamos

$$C \coloneqq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(-\infty, b - \frac{1}{k}\right].$$

1. Para cada k, tenemos que $b > b - \frac{1}{k}$, por eso

$$\left(-\infty, b - \frac{1}{k}\right] \subseteq (-\infty, b).$$

Luego $C \subseteq (-\infty, b)$.

2. Sea $x \in (-\infty, b)$. En otras palabras, $x < b$. Luego $b - x > 0$ y

$$\frac{1}{b-x} > 0.$$

Pongamos

$$m := \left\lceil \frac{1}{b-x} \right\rceil.$$

Entonces

$$m \geq \frac{1}{b-x}, \qquad \frac{1}{m} \leq b - x, \qquad x \leq b - \frac{1}{m}.$$

Esto significa que $x \in \left(-\infty, b - \frac{1}{m}\right]$. Por lo tanto, $x \in C$. □

6 Proposición (la sigma-álgebra de Borel del eje real está generada por los rayos derechos abiertos)**.** *La σ-álgebra* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *está generada por* $\{(a, +\infty)\colon a \in \mathbb{R}\}$.

Demostración. Sea

$$\mathcal{G} := \{(a, +\infty)\colon a \in \mathbb{R}\}.$$

Denotemos por $\mathcal{F}$ a la σ-álgebra generada por $\mathcal{G}$.

1. Para cada y en $\mathbb{R}$, $(-\infty, y] = \mathbb{R} \setminus (y, +\infty) \in \mathcal{F}$.

2. Para cada b en $\mathbb{R}$,

   $$(-\infty, b) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(-\infty, b - \frac{1}{k}\right],$$

   por eso $(-\infty, b) \in \mathcal{F}$.

3. Para cualesquiera a, b en $\mathbb{R}$ con $a < b$,

   $$(a, b) = (a, +\infty) \cap (-\infty, b) \in \mathcal{F}.$$

4. Sea A un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Se sabe que A se puede representar como la unión de una sucesión de intervalos de la forma (a_n, b_n), donde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{F}$.

5. $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra que contiene a la topología τ de $\mathbb{R}$, y $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es la mínima σ-álgebra con esta propiedad. Por lo tanto, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$.

6. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{G}$, y $\mathcal{F}$ es la mínima σ-álgebra con esta propiedad. Por lo tanto, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. □

7 Proposición (la sigma-álgebra de Borel del eje real extendido está generada por los rayos derechos)**.** *La σ-álgebra* $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ *está generada por* $\{(a, +\infty]\colon a \in \mathbb{R}\}$.