Caminos mínimos en grafos
(tarea adicional)

1 Definición (grafo ponderado)**.** Un *grafo ponderado* es un par (V, p), donde V es un conjunto finito y p es una función $V \times V \to [0, +\infty]$ tal que $p(v, v) = 0$ para cada v en V y $p(v, w) = p(w, v)$ para cualesquiera v, w en V. Los elementos de V se llaman *vértices* y el número $p(v, w)$ se llama el peso de la arista (v, w).

2 Definición (camino en un grafo)**.** Sea (V, p) un grafo ponderado. Un *camino* en V es una lista de vértices de V. Se dice que $(v_1, \ldots, v_m)$ une los vértices v_1 y v_m. Se dice que la longitud del camino es $m - 1$.

3 Definición (longitud del camino)**.** Sea (V, p) un grafo ponderado y sea $v_1, \ldots, v_m$ un camino en V. Entonces

$$\ell(v_1, \ldots, v_m) \coloneqq \sum_{j=1}^{m} p(v_j, v_{j+1}).$$

4 Proposición (sobre caminos con repeticiones y ciclos)**.** *Sea (V, p) un grafo ponderado. Dado un camino en V, existe un camino en V que une los mismos puntos, no tiene repeticiones y tiene longitud menor o igual que la longitud del camino original.*

Demostración. Sea $v_1, \ldots, v_m$ un camino en V. Si $r, s \in \{1, \ldots, m\}$, $1 \le r < s \le m$ y $v_r = v_s$, entonces

$$\ell(v_1, \ldots, v_r, v_{s+1}, \ldots, v_m) \le \ell(v_1, \ldots, v_m). \qquad \square$$

5 Definición (distancia entre dos vértices)**.** Sea (V, p) un grafo ponderado y sean v, w elementos de V. Denotemos por $d(v, w)$ al mínimo entre las longitudes de todos los caminos que unen v y w.

6 Proposición. *(V, d) es un espacio métrico.*

Algoritmo de Floyd y Warshall

7 Definición. Sea (V, p) un grafo ponderado y sean v, w elementos de V. Dado r en $\mathbb{N}$, denotemos por $d_r(v, w)$ al mínimo entre las longitudes de todos los caminos de longitud $\le r$ que unen v y w.

8 Proposición. *Sea (V, p) un grafo ponderado y sean v, w elementos de V. Denotemos por n al número de los elementos de V. Entonces $d(v, w) = d_n(v, w)$.*

9 Proposición. *Sean (V, p) un grafo ponderado, $v, w \in V$ y $r \in \mathbb{N}_0$. Entonces*

$$d_{r+1}(v, w) = \min_{u \in V} \big(d_r(v, u) + p(u, w) \big).$$

10 Problema. Demostrar las dos proposiciones anteriores.

11 Problema. En algún lenguaje de programación escribir un programa que calcula $d(v, w)$ para cada par v, w en V usando las ideas anteriores. Se recomienda identificar V con $\{1, \ldots, n\}$ y guardar el graf ponderado como una matriz de tamaño $n \times n$ cuya entrada (j, k) es $p(j, k)$.