Operadores del desplazamiento en espacios de sucesiones

Objetivos. Estudiar las propiedades elementales (especialmente la norma y la invertibilidad) de los operadores del desplazamiento a la izquierda y a la derecha en los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \le p < +\infty$.

En todo este tema suponemos que $1 \le p < +\infty$.

1 Definición. Para cada m en $\mathbb{N}$ denotemos por e_m a la sucesión

$$e_m = (\delta_{m,k})_{k\in\mathbb{N}}.$$

2 Proposición. *$e_m \in \ell^p(\mathbb{N})$ y $\|e_m\|_p = 1$.*

Demostración.

$$\|e_m\|_p^p = \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_{m,k}^p = 1.$$ □

3 Definición. Sea $1 \le p < +\infty$. Definimos $L\colon \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ y $R\colon \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ mediante las siguientes reglas:

$$(Rx)_k := \begin{cases} x_{k-1}, & k \ge 2, \\ 0, & k = 1; \end{cases} \qquad (Lx)_k := x_{k+1}.$$

En otras palabras, si $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$, entonces

$$Rx = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots), \qquad Lx = (x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots).$$

4 Ejercicio. Calcular Re_m y Le_m.

5 Proposición. *Los operadores L y R están bien definidos: si $x \in \ell^p(\mathbb{N})$, entonces $Lx \in \ell^p(\mathbb{N})$ y $Rx \in \ell^p(\mathbb{N})$. Además, $\|L\| = 1$ y $\|R\| = 1$.*

Idea de demostración. Primero verificamos que para cada x en $\ell^p(\mathbb{N})$ se cumple

$$\|Rx\|_p = \|x\|_p, \qquad \|Lx\|_p \le \|x\|_p.$$

Luego notamos que $Le_2 = e_1$, $\|e_1\|_p = 1$ y $\|e_2\|_p = 1$. Usando la definición de la norma del operador lineal, obtenemos el resultado. □

6 Proposición. *$LR = I$, $RL \neq I$.*

7 Proposición. *El operador R es inyectivo, pero no es sobre. El operador L es sobre, pero no es inyectivo.*

8 Problema. Estudiar las propiedades de los operadores L y R en el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

9 Problema. Estudiar las propiedades de los operadores L y R en el espacio $c_0(\mathbb{N})$.

10 Problema. Definir y estudiar análogos de los operadores L y R en el espacio $\ell^p(\mathbb{Z})$, donde $1 \leq p < +\infty$, y en el espacio $\ell^\infty(\mathbb{Z})$.