# Operadores de desplazamiento y sus composiciones

**Objetivos.** Conocer los operadores de desplazamiento izquierdo y derecho, $L$ y $R$ y calcular sus composiciones $LR$ y $RL$.

**Requisitos.** Espacio de sucesiones cuadrado sumables, operador lineal.

**1. Espacio $\ell^2$ (repaso).** Denotamos por $\mathbb{N}$ el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$. El espacio $\ell^2(\mathbb{N})$ o brevemente $\ell^2$ está formado por todas las sucesiones cuadrado sumables. En otras palabras, los elementos de $\ell^2$ son funciones $x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^2 < +\infty.$$

La norma en $\ell^2(\mathbb{N})$ se define como

$$\|x\|_2 \coloneqq \left( \sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Se sabe que $\ell^2(\mathbb{N})$ es un espacio de Hilbert.

**2. Otra opción: trabajar con todas las sucesiones.** En vez del espacio $\ell^2$ uno puede trabajar con el espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de todas las sucesiones complejas. En este caso no definimos la norma de las sucesiones.

**3. Definición informal de los operadores $L$ y $R$.** Definimos $L\colon \ell^2 \to \ell^2$ y $R\colon \ell^2 \to \ell^2$ de la siguiente manera. Dada una sucesión

$$x = (x_j)_{j=1}^{\infty} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots),$$

pongamos

$$Lx \coloneqq (x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots), \qquad Rx \coloneqq (0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

**4. Definición formal del operador $L$.** Escriba fórmulas para las primeras componentes de $Lx$:

$$(Lx)_1 = x_2, \qquad (Lx)_2 = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad (Lx)_3 = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad (Lx)_4 = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Escriba la fórmula general para las componentes de $Lx$:

$$(Lx)_j = \underbrace{\qquad}_{?} \qquad (j \in \mathbb{N}).$$

**5. Definición formal del operador $\boldsymbol{R}$.** Escriba fórmulas para las primeras componentes de $Rx$:

$$(Rx)_1 = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad (Rx)_2 = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad (Rx)_3 = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad (Rx)_4 = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Escriba la fórmula general para las componentes de $Rx$:

$$(Rx)_j = \begin{cases} \qquad , & \text{si} \qquad\qquad ; \\ \qquad , & \text{si} \qquad\qquad . \end{cases}$$

**6. Calculamos las composiciones $\boldsymbol{LR}$ y $\boldsymbol{RL}$ de manera informal.** Recordamos que si

$$x = (x_j)_{j=1}^{\infty} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots), \qquad y = (y_j)_{j=1}^{\infty} = (y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots),$$

entonces

$$Lx = (\qquad, \qquad, \qquad, \qquad, \ldots), \qquad Ry = (\qquad, \qquad, \qquad, \qquad, \ldots).$$

Para calcular $RLx$, imagine que $y = Lx$ y aplique la fórmula para $Ry$.

$$RLx =$$

Para calcular $LRy$, imagine que $x = Ry$ y aplique la fórmula para $Lx$.

$$LRy = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Notamos que la composición $\underbrace{\qquad}_{?}$ es el operador identidad, y la composición $\underbrace{\qquad}_{?}$ no es el operador identidad.

**7. Definición formal del operador identidad.** El operador identidad $I\colon \ell^2 \to \ell^2$ se define mediante la siguiente regla:

$$(Ix)_j := \underbrace{\qquad}_{?} \qquad (j \in \mathbb{N},\ x \in \ell^2).$$

**8. Calculamos la composición $\boldsymbol{LR}$ de manera formal.** Sea $x \in \ell^2$ y sea $j \in \mathbb{N}$. Entonces

$$(LRx)_j = (Rx)_{???}.$$

Notamos que $j + 1 \geq \underbrace{\qquad}_{?}$, por eso luego aplicamos el $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{primer/segundo}}$ caso de la definición de $R$. Finalmente obtenemos

$$(LRx)_j = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Esto significa que $LR = \underbrace{\qquad}_{?}$.

**9. Calculamos la composición *RL* de manera formal.** Sea $x \in \ell^2$ y sea $j \in \mathbb{N}$. Si $j = 1$, entonces aplicamos el $\underbrace{\hspace{8em}}_{\text{primer/segundo}}$ caso de la definición de $R$:

$$(RLx)_1 = (R(Lx))_1 = \underbrace{\hspace{2em}}_{?}.$$

Si $j \geq 2$, entonces aplicamos el $\underbrace{\hspace{8em}}_{\text{primer/segundo}}$ caso de la definición de $R$ y luego la definición de $L$:

$$(RLx)_j = (R(Lx))_j = (Lx)_{???} = x_{???}.$$

Escribimos las fórmulas obtenidas para dos casos:

$$(RLx)_j = \begin{cases} \qquad, & \text{si } j = 1; \\ \qquad, & \text{si } \qquad. \end{cases}$$

Notamos que $RL \underbrace{\hspace{2em}}_{=/\neq} I$.

**10. Otras relaciones entre *L* y *R*.** Se puede demostrar que los operadores $L$ y $R$ son mutualmente adjuntos, esto es,

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, Ry \rangle \qquad (x, y \in \ell^2),$$

donde $\langle \ldots, \ldots \rangle$ es el producto interno del espacio $\ell^2$. Además es fácil ver que $R$ es una isometría lineal. De estas propiedades sale automáticamente que la composición $LR$ es el operador $\underbrace{\hspace{2em}}_{?}$, y la composición $RL$ es una proyección ortogonal.

**11. Propiedades inyectiva y suprayectiva.** Usando los resultados anteriores o razonando desde cero se puede determinar cuál de los operadores $L$ y $R$ es inyectivo y cuál es suprayectivo. Hallar el núcleo y la imagen de cada uno de estos dos operadores.

**12. El espectro y sus partes.** Un problema más avanzado es haller el espectro de $L$ y $R$, luego el espectro puntual, continuo y residuo.