El conjunto de funciones

1 Definición. Sean X, Y conjuntos. Denotemos por Y^X al conjunto de todas las funciones $X \to Y$. En otras palabras, $f \in Y^X$ si y solo si $f\colon X \to Y$.

2 Proposición. *Sean A, B, C, D conjuntos tales que $A \sim C$, $B \sim D$. Entonces*

$$A^B \sim C^D.$$

Demostración. Sean $f\colon A \to C$ y $g\colon B \to D$ biyecciones.

Dada una función $u\colon B \to A$, podemos definir $v\colon D \to C$ como

$$v(d) \coloneqq f(u(g^{-1}(d))),$$

esto es, $v \coloneqq f \circ u \circ g^{-1}$.

Definimos $\Phi\colon A^B \to C^D$ mediante la regla

$$\Phi(u) \coloneqq f \circ u \circ g^{-1}.$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & D \arrow[d, "\Phi(u)"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Definimos $\Psi\colon C^D \to A^B$ mediante la regla

$$\Psi(v) \coloneqq f^{-1} \circ v \circ g$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Psi(v)"'] & D \arrow[d, "v"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Entonces

$$\Psi(\Phi(u)) = f^{-1} \circ (f \circ u \circ g^{-1}) \circ g = u$$

y de manera similar $\Phi(\Psi(v)) = v$, así que Φ y Ψ son biyecciones. $\square$

3 Proposición. *Sean A, B, C conjuntos tales que $A \cap B = \varnothing$. Entonces*

$$C^{A \cup B} \sim (C^A) \times (C^B).$$

Demostración. Definimos $\Phi\colon C^{A\cup B} \to (C^A) \times (C^B)$ como

$$\Phi(f) = (f|_A, f|_B).$$

Definimos $\Psi\colon (C^A) \times (C^B) \to C^{A\cup B}$ como

$$\Psi(g,h)(x) \coloneqq \begin{cases} g(x), & x \in A; \\ h(x), & x \in B. \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que $\Phi(\Psi(g,h)) = (g,h)$ y $\Psi(\Phi(f)) = f$, así que Φ y Ψ son biyecciones mutualmente inversas. □

La siguiente idea se usa mucho en la programación funcional (por ejemplo, en el lenguaje Haskell) y se conoce como *currificación* (*currying* en inglés), en honor del matemático y lógico Haskell Curry.

4 Proposición. *Sean A, B, C conjuntos. Entonces*

$$(A^B)^C \sim A^{B\times C}.$$

Demostración. Definimos $\Phi\colon (A^B)^C \to A^{B\times C}$ como

$$\Phi(f)(b,c) \coloneqq f(c)(b).$$

Definimos $\Psi\colon A^{B\times C} \to (A^B)^C$ como

$$\Psi(g)(c)(b) \coloneqq g(b,c).$$

Entonces

$$\Phi(\Psi(g))(b,c) = \Psi(g)(c)(b) = g(b,c).$$

De manera similar, $\Psi(\Phi(f)) = f$. □

5 Proposición (el conjunto potencia como el conjunto de funciones con valores 0 y 1)**.** *Sea A un conjunto. Entonces*

$$\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A.$$

Demostración. Dado un subconjunto B de A, definimos $\Phi(B)\colon A \to \{0,1\}$ como la función característica de B:

$$\Phi(B)(a) \coloneqq 1_B(a) = \begin{cases} 1, & a \in B; \\ 0, & a \notin B. \end{cases}$$

Al revés, dada una función $h\colon A \to \{0,1\}$, definimos el conjunto $\Psi(h)$ como

$$\Psi(h) := \{a \in A\colon\ h(a) = 1\}.$$

Entonces $\Phi\colon \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$, $\Psi\colon \{0,1\}^A \to \mathcal{P}(A)$, y las funciones Φ y Ψ son mutualmente inversas. $\square$

6 Proposición. *Para cada m en $\mathbb{N}_0$ y cada n en $\mathbb{N}_0$,*

$$J_m^{J_n} \sim J_{m^n}.$$

Demostración. Fijamos m en $\mathbb{N}_0$. Procedemos por inducción matemática sobre n. Si $n = 0$, entonces el conjunto J_n es vacío, y existe solamente una función con el dominio vacío (su gráfica es vacía).

Si $n = 1$, entonces el conjunto J_n consiste de un punto 1, y cada función $f\colon J_1 \to J_m$ se determina por su único valor, así que $J_m^{J_1} \sim J_m$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}_0$ y $J_m^{J_n} \sim J_{m^n}$. Entonces, por la Proposición 3,

$$J_m^{J_{n+1}} \sim J_m^{J_n} \times J_m^{\{n+1\}}.$$

Luego

$$J_m^{J_{n+1}} \sim J_{m^n} \times J_m \sim J_{m^n \cdot m} = J_{m^{n+1}}.$$ $\square$

7 Corolario. *Si A y B son conjuntos, $A \sim J_m$, $B \sim J_n$, entonces $A^B \sim J_{m^n}$.*