Comparación de conjuntos por el "tamaño"

1 Definición. Sean A y B conjuntos. Escribimos $A \prec B$, si existe una función inyectiva $f\colon A \to B$.

2 Proposición. *Sean A, B, C conjuntos tales que $A \prec B$ y $B \prec C$. Entonces $A \prec C$.*

Demostración. Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ funciones inyectivas. Entonces $g \circ f\colon A \to C$ es inyectiva. $\square$

3 Proposición. *Sea A un conjunto. Entonces $A \prec A$.*

Anteriormente en este curso demostramos el teorema de Cantor, Schröder y Bernstein. Con la notación $\prec$ y $\sim$, este teorema se puede enunciar de la siguiente manera.

4 Teorema (Cantor–Schröder–Bernstein)**.** *Sean A y B conjuntos tales que $A \prec B$ y $B \prec A$. Entonces $A \sim B$.*

5 Proposición. *Sean A y B conjuntos. Entonces $A \prec B$ si y solo si existe un C de B tal que $A \sim C$.*

Demostración. Supongamos que $f\colon A \to B$ es inyectiva. Pongamos $C := f[A]$ y definimos $h\colon A \to C$ mediante la regla $h(x) := f(x)$. Entonces h es una biyección.

Al revés, supongamos que $C \subseteq B$ y $h\colon A \to C$ es una biyección. Definimos $f\colon A \to B$ como $f(x) = h(x)$. En otras palabras, extendemos el codominio de la función. Entonces f es una inyección. $\square$

6 Proposición. *Sean A y B conjuntos, $A \neq \varnothing$. Entonces $A \prec B$ si y solo si existe una función suprayectiva $g\colon B \to A$.*

Demostración. 1. Sea $C \subseteq B$ y sea $h\colon A \to C$ una biyección. Usando la suposición que $A \neq \varnothing$ elegimos $a \in A$. Definimos $g\colon B \to A$ mediante la siguiente regla:

$$g(y) := \begin{cases} h^{-1}(y), & y \in C; \\ a, & y \in B \setminus C. \end{cases}$$

Entonces $g[B] \subseteq g[C] = h^{-1}[C] = A$.

2. Sea $g\colon B \to A$ una función suprayectiva. Para cada x en A elegimos un elemento $f(x)$ en B tal que $g(f(x)) = x$. En este momento se utiliza el axioma de elección.

Mostremos que f es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$. □

7 Corolario. *Sea A un conjunto no vacío. Entonces A es a lo sumo numerable si y solo si existe una función suprayectiva $g\colon \mathbb{N} \to A$.*