Formas sesquilineales

Suponemos que H es un espacio vectorial complejo.

1 Definición (forma sesqulineal)**.** Una función $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ se llama *forma sesquilineal* (o *función sesquilineal*) si es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo argumento, esto es, para cada a, b, c en H y cada λ, μ en $\mathbb{C}$,

$$f(\lambda a + \mu b, c) = \lambda f(a, c) + \mu f(b, c),$$
$$f(a, \lambda b + \mu c) = \overline{\lambda} f(a, b) + \overline{\mu} f(a, c).$$

En lo que sigue suponemos que f es una forma sesquilineal.

2 Proposición. *Para cada m en $\mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, \ldots, a_m$ en H, cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ en $\mathbb{C}$ y cualquier b en H,*

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, b\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(a_j, b).$$

Demostración. Inducción matemática sobre m. □

3 Proposición. *Para cada n en $\mathbb{N}$, cualquier a en H, cualesquiera $b_1, \ldots, b_n$ en $\mathbb{N}$ y cualesquiera $\mu_1, \ldots, \mu_n$ en H,*

$$f\left(a, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mu_k} f(a, b_k).$$

4 Proposición. *Para cada m, n en $\mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ en H y cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n$ en $\mathbb{C}$,*

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \overline{\mu_k} f(a_j, b_k).$$

5 Proposición. *Sea $A \subseteq H$. Entonces el conjunto $\{b \in H\colon\ \forall a \in A\ f(a, b) = 0\}$ es un subespacio de H.*

6 Proposición. *Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in H$, $S = \ell(a_1, \ldots, a_m)$. Entonces*

$$\{b \in H\colon\ \forall s \in S\ f(s, b) = 0\} = \{b \in H\colon\ \forall k \in \{1, \ldots, m\}\ f(a_k, b) = 0\}.$$

7 Proposición (la identidad de paralelogramo para formas sesquilineales)**.** *Sea* $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ *una forma sesquilineal. Denotemos por* q *a la* forma cuadrática *asociada a* f*:*

$$q\colon H \to \mathbb{C}, \qquad q(x) \coloneqq f(x,x) \qquad (x \in H).$$

Entonces

$$q(a+b) + q(a-b) = 2(q(a) + q(b)). \tag{1}$$

Demostración. Notamos que

$$q(a+b) = f(a+b, a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Sustituimos $-b$ en vez de b:

$$q(a-b) = q(a) - f(a,b) - f(b,a) + q(b).$$

Al sumar estas dos igualdades obtenemos (2). □

8 Lema.

$$\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^{pk} = \begin{cases} 4, & p = 0; \\ 0, & p \in \{1,2,3\}. \end{cases}$$

9 Proposición (la identidad de polarización para formas sesquilineales)**.** *Sea* $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ *una forma sesquilineal. Denotemos por* q *a la forma cuadrática asociada a* f*. Sean* $a, b \in H$*. Entonces*

$$f(a,b) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, q(a + \mathrm{i}^k \, b). \tag{2}$$

Demostración. Para cada k en $\{0,1,2,3\}$ tenemos

$$q(a + \mathrm{i}^k \, b) = f(a + \mathrm{i}^k \, b, a + \mathrm{i}^k \, b) = q(a) - \mathrm{i}^k \, f(a,b) + \mathrm{i}^k \, f(b,a) + q(b).$$

Multiplicamos por i^k:

$$\mathrm{i}^k \, q(a + \mathrm{i}^k \, b) = \mathrm{i}^k \, q(a) + f(a,b) + \mathrm{i}^{2k} \, f(b,a) + \mathrm{i}^k \, q(b).$$

Sumando sobre k en $\{0,1,2,3\}$ obtenemos (2). □