Propiedades elementales de las formas sesquilineales

Objetivos. Estudiar o repasar las propiedades básicas de las formas sesquilineales.

Prerrequisitos. Funciones lineales y bilineales en espacios vectoriales.

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

1 Definición (forma sesqulineal)**.** Una función $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ se llama *forma sesquilineal* o *función sesquilineal*, si es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo argumento, esto es, para cada a, b, c en H y cada λ, μ en $\mathbb{C}$,

$$f(\lambda a + \mu b, c) = \lambda f(a, c) + \mu f(b, c),$$
$$f(a, \lambda b + \mu c) = \overline{\lambda} f(a, b) + \overline{\mu} f(a, c).$$

2 Observación. Podemos separar la definición de forma sesquilineal en 4 propiedades.

- f es aditiva respecto al primer argumento:
$$f(a + b, c) = f(a, c) + f(b, c). \tag{1}$$

- f es homogénea respecto al primer argumento:
$$f(\lambda a, b) = \lambda f(a, b). \tag{2}$$

- f es aditiva respecto al segundo argumento:
$$f(a, b + c) = f(a, b) + f(a, c). \tag{3}$$

- f es homogénea conjugada ("conjugadamente homogénea) respecto al segundo argumento:
$$f(a, \lambda b) = \overline{\lambda}\, f(a, b). \tag{4}$$

Propiedad lineal y lineal conjugada

En las siguientes proposiciones suponemos que $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal. Las demostraciones son simples y se dejan como ejercicios.

3 Proposición. *Para cada m en $\mathbb{N}$, cada $a_1, \ldots, a_m$ en V y cada b en V,*

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} a_j, b\right) = \sum_{j=1}^{m} f(a_j, b).$$

Idea de demostración. Aplicar la propiedad (1) y la inducción matemática sobre m. □

4 Proposición. *Para cada m en $\mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, \ldots, a_m$ en V, cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ en $\mathbb{C}$ y cualquier b en V,*

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, b\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(a_j, b).$$

Idea de demostración. Aplicar la Proposición 3 y la propiedad (2). □

5 Proposición. *Para cada n en $\mathbb{N}$, cada a en V y cada $b_1, \ldots, b_n$ en V,*

$$f\left(a, \sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f(a, b_k).$$

Idea de demostración. Aplicar la propiedad (3) y la inducción matemática sobre n. □

6 Proposición. *Para cada n en $\mathbb{N}$, cualquier a en V, cualesquiera $b_1, \ldots, b_n$ en V y cualesquiera $\mu_1, \ldots, \mu_n$ en $\mathbb{C}$,*

$$f\left(a, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mu_k} f(a, b_k).$$

Idea de demostración. Aplicar la Proposición 5 y la propiedad (4). □

7 Proposición. *Para cada m, n en $\mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ en V y cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n$ en $\mathbb{C}$,*

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \overline{\mu_k} f(a_j, b_k).$$

Idea de demostración. Se sigue de las Proposiciones 4 y 6. □

La relación de "ortogonalidad" respecto a una forma sesquilineal

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Dados dos vectores a, b en V, podemos decir que el par ordenado (a, b) es *f-ortogonal*, si $f(a, b) = 0$. También en este caso podemos decir que a, b son f-ortogonal y que a es f-ortogonal a b. Notemos que esta relación binaria, en general, no es simétrica.

8 Proposición. *Sea $A \subseteq V$. Entonces el siguiente conjunto es un subespacio de V:*

$$\{b \in V\colon \quad \forall a \in A \quad f(a, b) = 0\}.$$

9 Proposición. *Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in V$, $S = \ell(a_1, \ldots, a_m)$. Entonces*

$$\big\{b \in V\colon \quad \forall s \in S \quad f(s, b) = 0\big\} = \big\{b \in V\colon \quad \forall k \in \{1, \ldots, m\} \quad f(a_k, b) = 0\big\}.$$

Los funcionales que se obtienen al fijar un argumento en una forma sesquilineal

Suponemos que $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal.

10 Proposición. *Sea $a \in V$. Definimos $g_a\colon V \to \mathbb{C}$,*

$$g_{f,a}(x) \coloneqq f(x, a).$$

Entonces $g_{f,a}$ es un funcional lineal.

11 Proposición. *Sea $a \in V$. Definimos $h_a\colon V \to \mathbb{C}$,*

$$h_{f,a}(x) \coloneqq \overline{h(a, x)}.$$

Entonces $h_{f,a}$ es un funcional lineal.

La adjunta de una forma sesquilineal

12 Ejercicio. Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Definimos $f^*\colon V^2 \to \mathbb{C}$,

$$f^*(x, y) := \overline{f(y, x)}.$$

Demostrar que f^* es una forma sesquilineal.