Formas sesquilineales: definición y ejemplos (un tema de la unidad “Espacios con producto interno”)

Egor Maximenko, Enrique Abdeel Muñoz de la Colina, Elisa Suárez Barraza

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

3 de enero de 2023

Contenido

Objetivos

- Definir el concepto de forma sesquilineal en un espacio vectorial complejo.
- Conocer ejemplos de formas sesquilineales en $\mathbb{C}^n$.
- Conocer ejemplos de formas sesquilineales en el espacio $C([a,b])$.
- Conocer ejemplo de formas sesqulineales en el espacio c_{fin}, sucesiones de soporte finito.

Prerrequisitos

Para enteder la definición, se requieren los siguientes temas de álgebra lineal:

- Espacios vectoriales complejos.
- Funciones lineales y bilineales en espacios vectoriales.
- El producto interno canónico en $\mathbb{C}^n$.

Prerrequisitos

Para enteder la definición, se requieren los siguientes temas de álgebra lineal:

- Espacios vectoriales complejos.
- Funciones lineales y bilineales en espacios vectoriales.
- El producto interno canónico en $\mathbb{C}^n$.

Para entender los ejemplos, se necesitan también los siguientes temas:

- Propiedades de operaciones con matrices.
- El espacio de sucesiones de soporte finito.
- El espacio de funciones continuas en $[a, b]$.

Plan

Definición de la forma sesquilineal

En este tema asumiremos que V es un espacio vectorial complejo.

Definición

Una función $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ se llama forma sesquilineal o función sesquilineal, si es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo, es decir, para cada a, b, c en V y cada λ, μ en $\mathbb{C}$,

$$f(\lambda a + \mu b, c) = \lambda\, f(a, c) + \mu\, f(b, c)$$
$$f(a, \lambda b + \mu c) = \overline{\lambda}\, f(a, b) + \overline{\mu}\, f(a, c).$$

Ejercicio: verificar los siguientes ejemplos

A continuación mostramos varios ejemplos.

Ejercicio: verificar los siguientes ejemplos

A continuación mostramos varios ejemplos.

En cada ejemplo, se recomienda verificar que la función efectivamente es sesqulineal.

Plan

Ejemplo: la forma sesquilineal en $\mathbb{C}^n$ asociada a un vector de peso

Sea $p = [p_j]_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$.

Ejemplo: la forma sesquilineal en $\mathbb{C}^n$ asociada a un vector de peso

Sea $p = [p_j]_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$.

Definimos

$$f\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad f(x,y) := \sum_{j=1}^n p_j x_j \overline{y_j}.$$

Ejemplo: la forma sesquilineal en $\mathbb{C}^n$ asociada a un vector de peso

Sea $p = [p_j]_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$.

Definimos
$$f\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad f(x, y) := \sum_{j=1}^n p_j x_j \overline{y_j}.$$

Entonces f es una forma sesquilineal.

Ejemplo: la forma sesquilineal en $\mathbb{C}^n$ asociada a una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, es decir, sea A una matriz compleja cuadrada $n \times n$.

Ejemplo: la forma sesquilineal en $\mathbb{C}^n$ asociada a una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, es decir, sea A una matriz compleja cuadrada $n \times n$.

Definimos

$$f\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad f(x, y) := y^* A x,$$

donde y^* es el vector transpuesto conjugado de y.

Ejemplo: la forma sesquilineal en $\mathbb{C}^n$ asociada a una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, es decir, sea A una matriz compleja cuadrada $n \times n$.

Definimos

$$f \colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad f(x, y) := y^* A x,$$

donde y^* es el vector transpuesto conjugado de y.

En otras palabras,

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} \overline{y_1} & \ldots & \overline{y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \ldots & A_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{j,k=1}^{n} A_{j,k} x_k \overline{y_j}.$$

Ejemplo: la forma sesquilineal en $\mathbb{C}^n$ asociada a una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, es decir, sea A una matriz compleja cuadrada $n \times n$.

Definimos

$$f : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad f(x, y) := y^* A x,$$

donde y^* es el vector transpuesto conjugado de y.

En otras palabras,

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} \overline{y_1} & \dots & \overline{y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{j,k=1}^{n} A_{j,k} x_k \overline{y_j}.$$

Entonces f es una forma sesquilineal.

Plan

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Sea $V := C([a,b],\mathbb{C})$, esto es,

$$V := \left\{ x \in \mathbb{C}^{[a,b]} : \quad f \text{ es continua} \right\}.$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Sea $V := C([a,b],\mathbb{C})$, esto es,

$$V := \left\{ x \in \mathbb{C}^{[a,b]} : \quad f \text{ es continua} \right\}.$$

Sea $p \in V$. Definimos $f \colon V \times V \to \mathbb{C}$,

$$f(x,y) := \int_a^b p(t)x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Sea $V := C([a,b],\mathbb{C})$, esto es,

$$V := \left\{ x \in \mathbb{C}^{[a,b]} : \quad f \text{ es continua} \right\}.$$

Sea $p \in V$. Definimos $f\colon V \times V \to \mathbb{C}$,

$$f(x,y) := \int_a^b p(t)x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Es fácil ver que $p\,x\,\overline{y} \in V$ y que la integral existe.

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que f es lineal respecto al primer argumento.

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que f es lineal respecto al primer argumento.

Sean $x, y, z \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que f es lineal respecto al primer argumento.

Sean $x, y, z \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

$$f(\lambda x + \mu y, z)$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que f es lineal respecto al primer argumento.

Sean $x, y, z \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

$$f(\lambda x + \mu y, z) =$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que f es lineal respecto al primer argumento.

Sean $x, y, z \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

$$f(\lambda x + \mu y, z) = \int_a^b p(t)(\lambda x(t) + \mu y(t))\overline{z(t)}\,\mathrm{d}t$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que f es lineal respecto al primer argumento.

Sean $x, y, z \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

$$f(\lambda x + \mu y, z) = \int_a^b p(t)(\lambda x(t) + \mu y(t))\overline{z(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$=$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que f es lineal respecto al primer argumento.

Sean $x, y, z \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y, z) &= \int_a^b p(t)(\lambda x(t) + \mu y(t))\overline{z(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_a^b p(t)x(t)\overline{z(t)}\,\mathrm{d}dt + \mu \int_a^b p(t)y(t)\overline{z(t)}\,\mathrm{d}dt \end{aligned}$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que f es lineal respecto al primer argumento.

Sean $x, y, z \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y, z) &= \int_a^b p(t)(\lambda x(t) + \mu y(t))\overline{z(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_a^b p(t)x(t)\overline{z(t)}\,\mathrm{d}dt + \mu \int_a^b p(t)y(t)\overline{z(t)}\,\mathrm{d}dt \\ &= \end{aligned}$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que f es lineal respecto al primer argumento.

Sean $x, y, z \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y, z) &= \int_a^b p(t)(\lambda x(t) + \mu y(t))\overline{z(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_a^b p(t)x(t)\overline{z(t)}\,\mathrm{d}dt + \mu \int_a^b p(t)y(t)\overline{z(t)}\,\mathrm{d}dt \\ &= \lambda\, f(x, z) + \mu\, f(y, z). \end{aligned}$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que f es lineal conjugada respecto al segundo argumento.

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que f es lineal conjugada respecto al segundo argumento.

$$f(x, \lambda y + \mu z)$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que f es lineal conjugada respecto al segundo argumento.

$$f(x, \lambda y + \mu z) =$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que f es lineal conjugada respecto al segundo argumento.

$$f(x, \lambda y + \mu z) = \int_a^b p(t)x(t)(\overline{\lambda y(t) + \mu z(t)})\,\mathrm{d}t$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que f es lineal conjugada respecto al segundo argumento.

$$
\begin{aligned}
f(x, \lambda y + \mu z) &= \int_a^b p(t)x(t)(\overline{\lambda y(t) + \mu z(t)})\,\mathrm{d}t \\
&=
\end{aligned}
$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que f es lineal conjugada respecto al segundo argumento.

$$
\begin{aligned}
f(x, \lambda y + \mu z) &= \int_a^b p(t) x(t) (\overline{\lambda y(t) + \mu z(t)})\, \mathrm{d}t \\
&= \overline{\lambda} \int_a^b p(t) x(t) \overline{y(t)}\, \mathrm{d}t + \overline{\mu} \int_a^b p(t) x(t) \overline{z(t)}\, \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que f es lineal conjugada respecto al segundo argumento.

$$
\begin{aligned}
f(x, \lambda y + \mu z) &= \int_a^b p(t) x(t) (\overline{\lambda y(t) + \mu z(t)}) \, \mathrm{d}t \\
&= \overline{\lambda} \int_a^b p(t) x(t) \overline{y(t)} \, \mathrm{d}t + \overline{\mu} \int_a^b p(t) x(t) \overline{z(t)} \, \mathrm{d}t \\
&=
\end{aligned}
$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que f es lineal conjugada respecto al segundo argumento.

$$\begin{aligned} f(x, \lambda y + \mu z) &= \int_a^b p(t)x(t)(\overline{\lambda y(t) + \mu z(t)})\,\mathrm{d}t \\ &= \overline{\lambda} \int_a^b p(t)x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t + \overline{\mu} \int_a^b p(t)x(t)\overline{z(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \overline{\lambda}\, f(x, y) + \overline{\mu}\, f(x, z). \end{aligned}$$

Plan

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una suma con peso

Sea V el espacio vectorial de las sucesiones complejas $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finitamente no nulas.

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una suma con peso

Sea V el espacio vectorial de las sucesiones complejas $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ finitamente no nulas.

También se conoce como el espacio de sucesiones de soporte finito.

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una suma con peso

Sea V el espacio vectorial de las sucesiones complejas $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finitamente no nulas.

También se conoce como el espacio de sucesiones de soporte finito.

Formalmente,

$$V \;:=\; \Big\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \colon \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n > k \quad x_n = 0 \Big\}.$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una suma con peso

Sea V el espacio vectorial de las sucesiones complejas $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finitamente no nulas.

También se conoce como el espacio de sucesiones de soporte finito.

Formalmente,

$$V \ := \ \Big\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \colon \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n > k \quad x_n = 0 \Big\}.$$

Sea $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una suma con peso

Sea V el espacio vectorial de las sucesiones complejas $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finitamente no nulas.

También se conoce como el espacio de sucesiones de soporte finito.

Formalmente,

$$V \;:=\; \Big\{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}:\quad \exists k \in \mathbb{N}\quad \forall n > k\quad x_n = 0\Big\}.$$

Sea $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Definimos $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(x, y) := \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j x_j \overline{y_j}.$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una suma con peso

Sea V el espacio vectorial de las sucesiones complejas $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finitamente no nulas.

También se conoce como el espacio de sucesiones de soporte finito.

Formalmente,

$$V \;:=\; \Big\{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\colon \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n > k \quad x_n = 0\Big\}.$$

Sea $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Definimos $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(x,y) := \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j x_j \overline{y_j}.$$

Notemos que la suma es finita, pero el número de los sumandos depende de x, y.

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una suma con peso

Mostremos que f es lineal respecto al primer argumento.

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + \mu y, z) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j(\lambda x_j + \mu y_j)\overline{z_j} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j\big(\lambda x_j\overline{z_j} + \mu y_j\overline{z_j}\big) \\
&= \lambda\sum_{j\in\mathbb{N}} p_j x_j\overline{z_j} + \mu\sum_{j\in\mathbb{N}} p_j y_j\overline{z_j} \\
&= \lambda\, f(x,z) + \mu\, f(y,z).
\end{aligned}$$

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una suma con peso

Mostremos que f es lineal conjugada respecto al segundo argumento.

$$\begin{aligned} f(x, \lambda y + \mu z) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j x_j (\overline{\lambda y_j + \mu z_j}) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j x_j (\overline{\lambda}\,\overline{y_j} + \overline{\mu}\,\overline{z_j}) \\ &= \overline{\lambda} \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j x_j \overline{y_j} + \overline{\mu} \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j x_j \overline{z_j} \\ &= \overline{\lambda}\, f(x, y) + \overline{\mu}\, f(x, z). \end{aligned}$$