

Formas sesquilineales

Objetivos. Estudiar la definición y algunos ejemplos de formas sesquilineales.

Prerrequisitos. Funciones lineales y bilineales en espacios vectoriales, operaciones con matrices, propiedades de las integrales de funciones continuas, propiedades de series.

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

1 Definición (forma sesquilineal). Una función $f: V^2 \rightarrow \mathbb{C}$ se llama *forma sesquilineal* o *función sesquilineal*, si es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo argumento. Formalmente, esto significa que para cada a, b, c en V y cada λ, μ en \mathbb{C} ,

$$\begin{aligned}f(\lambda a + \mu b, c) &= \lambda f(a, c) + \mu f(b, c), \\f(a, \lambda b + \mu c) &= \bar{\lambda} f(a, b) + \bar{\mu} f(a, c).\end{aligned}$$

2 Observación. Podemos separar la definición de forma sesquilineal en 4 propiedades.

- f es aditiva respecto al primer argumento:

$$f(a + b, c) = f(a, c) + f(b, c). \quad (1)$$

- f es homogénea respecto al primer argumento:

$$f(\lambda a, b) = \lambda f(a, b). \quad (2)$$

- f es aditiva respecto al segundo argumento:

$$f(a, b + c) = f(a, b) + f(a, c). \quad (3)$$

- f es homogénea conjugada (“conjugadamente homogénea”) respecto al segundo argumento:

$$f(a, \lambda b) = \bar{\lambda} f(a, b). \quad (4)$$

Ejemplos en el espacio \mathbb{C}^n

En cada uno de los ejemplos, se recomienda demostrar que la función bajo consideración efectivamente es sesquilineal.

3 Ejemplo (la forma sesquilineal en \mathbb{C}^n asociada a una matriz). Sea $V = \mathbb{C}^n$ y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Definimos $f: V^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(u, v) := v^* Au,$$

donde v^* es el vector v transpuesto conjugado. Por la definición de operaciones con vectores y matrices,

$$f(u, v) = \sum_{j=1}^n (Au)_j \bar{v}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{j,k} u_k \bar{v}_j.$$

Por ejemplo, para $n = 2$,

$$\begin{aligned} f(u, v) &= [\bar{v}_1, \bar{v}_2] \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [\bar{v}_1, \bar{v}_2] \begin{bmatrix} A_{1,1}u_1 + A_{1,2}u_2 \\ A_{2,1}u_1 + A_{2,2}u_2 \end{bmatrix} \\ &= A_{1,1}u_1\bar{v}_1 + A_{1,2}u_2\bar{v}_1 + A_{2,1}u_1\bar{v}_2 + A_{2,2}u_2\bar{v}_2. \end{aligned}$$

4 Ejemplo (la forma sesquilineal en \mathbb{C}^n asociada a un vector de pesos). Sea $V = \mathbb{C}^n$ y sea $d \in \mathbb{C}^n$. Definimos $f: V^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z, w) := \sum_{j=1}^n d_j z_j \bar{w}_j.$$

Esta forma sesquilineal se puede escribir como $f(z, w) = v^* Du$, donde $D := \text{diag}(d)$ es la matriz diagonal con las componentes d_1, \dots, d_n en la diagonal principal.

Ejemplos en el espacio de sucesiones de soporte finito

Denotemos por c_{fin} al espacio vectorial de las sucesiones de soporte finito:

$$c_{\text{fin}} := \{z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall j > k \quad z_j = 0\}.$$

5 Ejemplo. Sea $V = c_{\text{fin}}$ y sea $d \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Definimos $f: V^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z, w) := \sum_{j=1}^{\infty} d_j z_j \bar{w}_j.$$

Para cada z, w en c_{fin} , la serie se reduce a una suma finita, pero el número de los sumandos depende de z y w .

6 Ejemplo. Sea $V = c_{\text{fin}}$ y sea $M \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$. Definimos $f: V^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z, w) := \sum_{j,k=1}^{\infty} M_{j,k} z_j \overline{w_k}.$$

Para cada z, w en c_{fin} , la serie doble se reduce a una suma doble finita, pero el número de los sumandos depende de z y w .

Ejemplos en el espacio de funciones continuas

7 Ejemplo. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, y sea $V = C([a, b], \mathbb{C})$. Supongamos que $w \in C([a, b], \mathbb{C})$. Definimos $f: V^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(u, v) := \int_a^b w(t) u(t) \overline{v(t)} dt.$$

8 Ejemplo. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, y sea $V = C([a, b], \mathbb{C})$. Supongamos que $K \in C([a, b]^2, \mathbb{C})$. Definimos $f: V^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(u, v) := \int_a^b \int_a^b K(s, t) u(t) \overline{v(s)} dt ds.$$

Ejemplos en ℓ^2

9 Ejemplo. Sea $d \in \ell^\infty$. Definimos $f: \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z, w) := \sum_{j=1}^{\infty} d_j z_j \overline{w_j}.$$

La convergencia absoluta de la serie se demuestra fácilmente usando la desigualdad de Hölder con $p = q = 2$ (o la versión límite de la desigualdad de Cauchy para vectores):

$$\sum_{j=1}^{\infty} |d_j z_j \overline{w_j}| \leq \|d\|_\infty \sum_{j=1}^{\infty} |z_j \overline{w_j}| \leq \|d\|_\infty \|z\|_2 \|w\|_2.$$