Semianillos de conjuntos

Objetivos. Definir semianillos y anillos de conjuntos. Demostrar que el producto directo de semianillos es un semianillo.

Requisitos. Operaciones con conjuntos, σ-álgebras de conjuntos.

1. Definición (semianillo de conjuntos). Sea X un conjunto. Un conjunto $\mathcal{S} \subset 2^X$ se llama *semianillo* sobre X si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. $\varnothing \in \mathcal{S}$.
2. Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{S}$ se tiene que $A \cap B \in \mathcal{S}$.
3. Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{S}$ existe un número $n \in \{1, 2, \ldots\}$ y algunos conjuntos $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{S}$ disjuntos por pares tales que
$$A \setminus B = C_1 \cup \ldots \cup C_n.$$

2. Observación. Algunos autores no piden $\varnothing \in \mathcal{S}$ en la definición de semianillo y en la última condición permiten $n = 0$, es decir, permiten que la colección $(C_j)_{j=1}^n$ sea vacía.

3. Definición (semiálgebra de conjuntos). Un semianillo de conjuntos $\mathcal{S} \subset 2^X$ se llama *semiálgebra* sobre X si $X \in \mathcal{S}$.

4. Proposición. Sea X un conjunto. Entonces cada σ-álgebra sobre X es un semianillo y una semiálgebra sobre X.

5. Semianillos sobre un conjunto de dos elementos. Sea $X = \{0, 1\}$. Para cada una de las siguientes colecciones de conjuntos determine si es un semianillo o no:

1. $\varnothing$.
2. $\{\varnothing\}$.
3. $\{\{0\}\}$.
4. $\{\varnothing, \{0\}\}$.
5. $\{\varnothing, \{0, 1\}\}$.
6. $\{\varnothing, \{0\}, \{1\}\}$.
7. $\{\varnothing, \{0\}, \{0, 1\}\}$.
8. $\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

6. Ejemplo (conjuntos unipuntuales y el vacío). Sea X un conjunto. Denotemos por $\mathcal{S}$ a la colección cuyos elementos son el vacío y todos los subconjuntos unipuntuales de X:

$$\mathcal{S} = \{\varnothing\} \cup \big\{\{a\}\colon\ a \in X\big\} = \Big\{Y \subset X\colon \quad Y = \varnothing \quad \vee \quad \big(\exists a \in X \quad Y = \{a\}\big)\Big\}.$$

Entonces $\mathcal{S}$ es un semianillo sobre X.

7. Ejercicio (intervalos semiabiertos del eje real). Sea $X = \mathbb{R}$ y sea

$$\mathcal{S} := \big\{[a, b)\colon \quad a, b \in \mathbb{R}\big\}.$$

Demostrar que $\mathcal{S}$ es un semianillo sobre X.

8. Intervalos del eje real (repaso de topología). Se puede demostrar que para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) A es convexo: para cualesquiera $x, y \in A$ y $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

(b) A es conexo, es decir, no existen conjuntos abiertos $U, V \subset \mathbb{R}$ tales que $A \cap U \neq \varnothing$, $A \cap V \neq \varnothing$, $A \subset U \cup V$.

(c) $(\inf(A), \sup(A)) \subset A$.

(d) Existen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $(a, b) \subset A \subset [a, b]$.

(e) A tiene una de las siguientes formas (donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$):

$$\begin{array}{llllll} \mathbb{R}, & [a, +\infty), & (a, +\infty), & (-\infty, b], & (-\infty, b), & \\ [a, b], & [a, b), & (a, b], & (a, b), & \{a\}, & \varnothing. \end{array}$$

Los conjuntos que satisfacen cualquiera de estas condiciones se llaman *intervalos del eje real*.

9. Ejemplo. Sea $X = \mathbb{R}$ y sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todos los intervalos en X. Entonces $\mathcal{S}$ es una semiálgebra sobre X.

10. Ejercicio. Sea $X = \{0, 1, 2\}$. Construya dos semianillos $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset 2^X$ tales que $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ no sea semianillo.

11. Teorema (el producto de semianillos es semianillo). Sean X e Y algunos conjuntos y sean $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ semianillos sobre X e Y, respectivamente. Entonces el conjunto $\mathcal{S}_3$ definido de la siguiente manera es un semianillo sobre $X \times Y$:

$$\mathcal{S}_3 := \big\{A \times B\colon \quad A \in \mathcal{S}_1, \quad B \in \mathcal{S}_2\big\}.$$

Idea de demostración.

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup ((A \cap C) \times (B \setminus D)),$$

donde los conjuntos $((A \setminus C) \times B)$ y $((A \cap C) \times (B \setminus D))$ son disjuntos. $\square$