Anillos de conjuntos

Objetivos. Definir anillos y álgebras de conjuntos. Describir de manera explícita el anillo generado por un semianillo.

Requisitos. Operaciones con conjuntos, semianillo de conjuntos, σ-álgebras de conjuntos.

1. Definición (anillo de conjuntos). Sea X un conjunto. Un conjunto $\mathcal{A} \subset 2^X$ se llama *anillo* sobre X si $\varnothing \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es cerrado bajo las operaciones de la unión de dos conjuntos y la diferencia de dos conjuntos:

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$.
2. Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$.
3. Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

2. Definición (álgebra de conjuntos). Un conjunto $\mathcal{A}$ se llama *álgebra de conjuntos* sobre X si $\mathcal{A}$ es un anillo de conjunto de conjuntos y $X \in \mathcal{A}$.

3. Proposición (intersección de anillos es anillo). Sea $\mathfrak{A}$ un conjunto de anillos sobre un conjunto X. Consideremos la intersección de todos los elementos de $\mathfrak{A}$:

$$\mathcal{R} = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}} \mathcal{A} = \big\{ B \subset X : \quad \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{A} \quad B \in \mathcal{A} \big\}$$

Entonces $\mathcal{R}$ es un anillo.

4. Corolario. Sea $\mathcal{C} \subset 2^X$. Denotemos por $\mathcal{A}$ a la intersección de todos los anillos que contienen a $\mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{A}$ es un anillo. Más aún, $\mathcal{A}$ es el anillo más pequeño entre todos los anillos que contienen a $\mathcal{C}$. Es decir, si $\mathcal{B}$ es un anillo sobre X y $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

5. Definición (anillo generado por un conjunto de conjuntos). Sea $\mathcal{C} \subset 2^X$. Entonces la intersección de todos los anillos que contienen a $\mathcal{C}$ se llama el *anillo generado por* $\mathcal{C}$.

6. Ejercicio. Sea X un conjunto. Demuestre que 2^X es una álgebra (en particular, un anillo) sobre X.

7. Semianillo de conjuntos (repaso). Repasar la definición de semianillo de conjuntos.

8. Ejercicio. Sea $\mathcal{A}$ un anillo. Demuestre que $\mathcal{A}$ es un semianillo.

9. Teorema (descripción del anillo generado por un semianillo). Sea $\mathcal{S}$ un semianillo sobre X. Denotemos por $\mathcal{A}$ al conjunto de todos los subconjuntos de X que se pueden escribir como uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{A} := \Big\{ B \subset X\colon \quad \exists k \in \{1,2,\ldots\} \quad \exists P_1,\ldots,P_k \in \mathcal{S} \quad \text{disj. y tales que} \quad B = \bigcup_{i=1}^{k} P_i \Big\}.$$

Entonces $\mathcal{A}$ es el anillo generado por $\mathcal{S}$.

Demostración. Pasos principales de la demostración:

1. Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \cap B = \varnothing$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.
2. Si $m \in \{1,2,\ldots\}$ y $A_1,\ldots,A_m \in \mathcal{A}$ son disjuntos a pares, entonces $\bigcup_{i=1}^m A_m \in \mathcal{A}$.
3. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$.
4. Si $m \in \{1,2,3,\ldots\}$ y $A_1,\ldots,A_m \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcap_{i=1}^m A_m \in \mathcal{A}$.
5. Si $P, Q \in \mathcal{S}$, entonces $P \setminus Q \in \mathcal{A}$.
6. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{A}$.
7. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.
8. Si un anillo $\mathcal{B}$ contiene a $\mathcal{S}$, entonces contiene a $\mathcal{A}$. $\square$