Representación de funcionales lineales acotados en espacios de Hilbert (teorema de Fréchet–Riesz)

1 Proposición. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $a \in H$. Definimos $\varphi_a \colon H \to \mathbb{C}$ mediante la regla*

$$\varphi_a(x) \coloneqq \langle x, a \rangle.$$

Entonces $\varphi_a \in H^*$ y $\|\varphi_a\| = \|a\|$. Más aún,

$$a \in (\ker(\varphi_a))^\perp, \qquad \varphi_a(a) = \|a\|^2. \tag{1}$$

2 Ejercicio. Sean $a \in H$, $\psi \in H^*$ tales que

$$a \in (\ker(\psi))^\perp, \qquad \psi(a) = \|a\|^2.$$

Demostrar que $\psi = \varphi_a$.

3 Teorema. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $\psi \in H^*$. Entonces existe un único vector a en H tal que*

$$\forall x \in H \qquad \psi(x) = \langle x, a \rangle.$$

Demostración. Unicidad. Si $a, b \in H$ y $\psi(x) = \langle x, a \rangle = \langle x, b \rangle$ para cada x, entonces $a - b \in H^\perp = \{0_H\}$ y $a = b$.

Existencia. Si ψ es el funcional cero, es decir, $\psi = 0_{H^*}$, entonces ponemos $a = 0_H$. Consideremos el caso $\psi \neq 0_{H^*}$. Vamos a construir un vector a que satisfaga (1), luego demostremos que $\psi = \varphi_a$.

Denotemos $\ker(\psi)$ por S. Como ψ es un funcional lineal acotado, S es un subespacio cerrado de H. Como $\psi \neq 0_{H^*}$, $S \neq H$. Elegimos $v \in H \setminus S$. Aplicamos el teorema de la proyección ortogonal (también llamado el teorema de la descomposición ortogonal) y descomponemos v en la suma $v = u + w$, donde $u \in S$, $w \in S^\perp$. Notamos que $\psi(u) = 0$, por eso $\psi(w) = \psi(v) \neq 0$. Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w. Es cómodo hacerlo en dos pasos. Primero pongamos

$$h = \frac{1}{\psi(w)}\, w.$$

Entonces $\psi(h) = 1$. Ahora definimos a de la siguiente manera:

$$a = \frac{1}{\|h\|^2}\, h.$$

Entonces

$$\|a\|^2 = \frac{1}{\|h\|^2} = \psi(a).$$

Dado x en H, pongamos $\lambda = \frac{\psi(x)}{\psi(a)}$. Entonces

$$\psi(x - \lambda a) = \psi(x) - \frac{\psi(x)}{\psi(a)}\psi(a) = 0,$$

así que $x - \lambda a \in S$. Luego, como $a \in S^{\perp}$, obtenemos

$$\langle x - \lambda a, a \rangle = 0.$$

Por lo tanto,

$$0 = \langle x - \lambda a, a \rangle = \langle x, a \rangle - \lambda \|a\|^2 = \langle x, a \rangle - \lambda \psi(a) = \langle x, a \rangle - \psi(x).$$

Concluimos que $\psi(x) = \langle x, a \rangle$. $\square$

4 Corolario (sobre la correspondencia canónica entre el espacio de Hilbert y su dual)**.** *Sea H un espacio de Hilbert. Definimos $\Phi\colon H \to H^*$ mediante la regla $\Phi(a) \coloneqq \varphi_a$. Entonces la función Φ es biyectiva, adivita, homogénea conjugada e isométrica.*

5 Problema (sobre el bidual del espacio de Hilbert)**.** Sea H un espacio de Hilbert. Definimos $\Lambda\colon H \to H^{**}$ mediante la regla

$$\Lambda(a)(\psi) \coloneqq \psi(a).$$

Demostrar que Λ es un isomorfismo isométrico. Sugerencias. Ya sabemos que en cualquier espacio normado la función Λ es una isometría lineal. Falta mostrar que Λ es suprayectiva. Se recomienda el siguiente plan.

- Mostrar que la función $\langle \varphi_a, \varphi_b \rangle_{H^*} \coloneqq \langle b, a \rangle$ es un producto interno en H^*.

- Mostrar que la norma inducida por el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^*}$ es la norma estándar en el espacio dual H^*.

- Mostrar que H^* es un espacio de Hilbert.

- Dado un elemento g de H^{**}, aplicar el teorema de Fréchet–Riesz al espacio H^* y encontrar ψ en H^* tal que

$$\forall \xi \in H^* \qquad g(\xi) = \langle \xi, \psi \rangle_{H^*}.$$

- Aplicar el teorema de Fréchet–Riesz en el espacio H y encontrar a en H tal que $g = \Lambda(a)$.