

Representación de funcionales lineales acotados en espacios de Hilbert (teorema de Fréchet–Riesz)

1 Proposición. Sea H un espacio de Hilbert y sea $a \in H$. Definimos $\varphi_a: H \rightarrow \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\varphi_a(x) := \langle x, a \rangle.$$

Entonces $\varphi_a \in H^*$ y $\|\varphi_a\| = \|a\|$. Más aún,

$$a \in (\ker(\varphi_a))^\perp, \quad \varphi_a(a) = \|a\|^2. \quad (1)$$

2 Ejercicio. Sean $a \in H$, $\psi \in H^*$ tales que se cumplen las propiedades (1). Demostrar que $\psi = \varphi_a$.

3 Teorema. Sea H un espacio de Hilbert y sea $\psi \in H^*$. Entonces existe un único vector a en H tal que

$$\forall x \in H \quad \psi(x) = \langle x, a \rangle.$$

Demostración. Unicidad. Si $a, b \in H$ y $\psi(x) = \langle x, a \rangle = \langle x, b \rangle$ para cada x , entonces $a - b \in H^\perp = \{0_H\}$ y $a = b$.

Existencia. Si $\psi = 0_{H \rightarrow \mathbb{C}}$, entonces ponemos $a = 0_H$. Consideremos el caso $\psi \neq 0_{H \rightarrow \mathbb{C}}$. Vamos a construir un vector a que satisfaga (1), luego demostraremos que $\psi = \varphi_a$.

Denotemos $\ker(\psi)$ por S . Como ψ es un funcional lineal acotado, S es un subespacio cerrado de H . Como $\psi \neq 0_{H \rightarrow \mathbb{C}}$, $S \neq H$. Elegimos $v \in H \setminus S$. Descomponemos v en la suma $v = u + w$, donde $u \in S$, $w \in S^\perp$. Notamos que $\psi(w) = \psi(v) \neq 0$. Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w . Es cómodo hacerlo en dos pasos. Primero pongamos

$$h = \frac{1}{\psi(w)} w.$$

Entonces $\psi(h) = 1$. Ahora definimos a de la siguiente manera:

$$a = \frac{1}{\|h\|^2} h.$$

Entonces

$$\|a\|^2 = \frac{1}{\|h\|^2} = \psi(a).$$

Dado x en H , pongamos $\lambda = \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}$. Entonces

$$\psi(x - \lambda a) = \psi(x) - \frac{\psi(x)}{\|a\|^2} \psi(a) = 0,$$

así que $x - \lambda a \in S$. Luego

$$0 = \langle x - \lambda a, a \rangle = \langle x, a \rangle - \lambda \|a\|^2 = \langle x, a \rangle - \psi(x).$$

Concluimos que $\psi(x) = \langle x, a \rangle$. □

4 Corolario (sobre la correspondencia entre un espacio de Hilbert y su dual). *Sea H un espacio de Hilbert. Definimos $\Phi: H \rightarrow H^*$ mediante la regla $\Phi(a) := \varphi_a$. Entonces la función Φ es biyectiva, aditiva, homogénea conjugada e isométrica.*

5 Corolario (sobre el bidual de un espacio de Hilbert). *Sea H un espacio de Hilbert. Definimos $\Lambda: H \rightarrow H^{**}$ mediante la regla*

$$\Lambda(a)(\psi) := \psi(a).$$

Entonces Λ es un isomorfismo isométrico.