Sucesiones regulares de Cauchy (un tema de la unidad “Espacios métricos”)

Egor Maximenko,

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

31 de agosto de 2022

Objetivos.

- Estudiar el concepto de sucesiones regulares de Cauchy en espacios métricos.
- Mostrar que la completez del espacio métrico se puede describir en términos de las sucesiones regulares de Cauchy.

Prerrequisitos.

- Sucesiones convergentes.
- Sucesiones de Cauchy.
- El medidor de Cauchy de una sucesión.
- Espacios métricos completos.

Sucesión regular de Cauchy

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Sucesión regular de Cauchy

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Definición

Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Se dice que a es regular de Cauchy si para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple la desigualdad

$$d(a_n, a_{n+1}) < 2^{-n-1}.$$

Cada sucesión regular de Cauchy es de Cauchy

Proposición

Sea a una sucesión regular de Cauchy en X. Entonces a es de Cauchy.

Demostración

Sea $q \in \mathbb{N}$ y sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq q$.

Demostración

Sea $q \in \mathbb{N}$ y sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq q$.

Sea $m > n$. Aplicamos la desigualdad poligonal y la suposición que a es regular de Cauchy, luego acotamos la suma de la progresión geométrica:

$$d(a_n, a_m)$$

Demostración

Sea $q \in \mathbb{N}$ y sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq q$.

Sea $m > n$. Aplicamos la desigualdad poligonal y la suposición que a es regular de Cauchy, luego acotamos la suma de la progresión geométrica:

$$d(a_n, a_m) \leq$$

Demostración

Sea $q \in \mathbb{N}$ y sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq q$.

Sea $m > n$. Aplicamos la desigualdad poligonal y la suposición que a es regular de Cauchy, luego acotamos la suma de la progresión geométrica:

$$d(a_n, a_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1})$$

Demostración

Sea $q \in \mathbb{N}$ y sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq q$.

Sea $m > n$. Aplicamos la desigualdad poligonal y la suposición que a es regular de Cauchy, luego acotamos la suma de la progresión geométrica:

$$d(a_n, a_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) <$$

Demostración

Sea $q \in \mathbb{N}$ y sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq q$.

Sea $m > n$. Aplicamos la desigualdad poligonal y la suposición que a es regular de Cauchy, luego acotamos la suma de la progresión geométrica:

$$d(a_n, a_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) < \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k-1}$$

Demostración

Sea $q \in \mathbb{N}$ y sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq q$.

Sea $m > n$. Aplicamos la desigualdad poligonal y la suposición que a es regular de Cauchy, luego acotamos la suma de la progresión geométrica:

$$d(a_n, a_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) < \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k-1} <$$

Demostración

Sea $q \in \mathbb{N}$ y sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq q$.

Sea $m > n$. Aplicamos la desigualdad poligonal y la suposición que a es regular de Cauchy, luego acotamos la suma de la progresión geométrica:

$$d(a_n, a_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) < \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k-1} < 2^{-n}$$

Demostración

Sea $q \in \mathbb{N}$ y sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq q$.

Sea $m > n$. Aplicamos la desigualdad poligonal y la suposición que a es regular de Cauchy, luego acotamos la suma de la progresión geométrica:

$$d(a_n, a_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) < \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k-1} < 2^{-n} \leq$$

Demostración

Sea $q \in \mathbb{N}$ y sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq q$.

Sea $m > n$. Aplicamos la desigualdad poligonal y la suposición que a es regular de Cauchy, luego acotamos la suma de la progresión geométrica:

$$d(a_n, a_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) < \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k-1} < 2^{-n} \leq 2^{-q}.$$

Demostración

Sea $q \in \mathbb{N}$ y sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq q$.

Sea $m > n$. Aplicamos la desigualdad poligonal y la suposición que a es regular de Cauchy, luego acotamos la suma de la progresión geométrica:

$$d(a_n, a_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) < \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k-1} < 2^{-n} \leq 2^{-q}.$$

El caso $m < n$ se considera de manera similar, y en el caso $m = n$ tenemos $d(a_n, a_m) = 0$.

Demostración

Sea $q \in \mathbb{N}$ y sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq q$.

Sea $m > n$. Aplicamos la desigualdad poligonal y la suposición que a es regular de Cauchy, luego acotamos la suma de la progresión geométrica:

$$d(a_n, a_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) < \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k-1} < 2^{-n} \leq 2^{-q}.$$

El caso $m < n$ se considera de manera similar, y en el caso $m = n$ tenemos $d(a_n, a_m) = 0$.

Por lo tanto, obtenemos la siguiente cota para el medidor de Cauchy:

$$\gamma_a(q) = \sup_{m,n \geq q} d(a_n, a_m) \leq 2^{-q}.$$

Demostración

Sea $q \in \mathbb{N}$ y sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq q$.

Sea $m > n$. Aplicamos la desigualdad poligonal y la suposición que a es regular de Cauchy, luego acotamos la suma de la progresión geométrica:

$$d(a_n, a_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) < \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k-1} < 2^{-n} \leq 2^{-q}.$$

El caso $m < n$ se considera de manera similar, y en el caso $m = n$ tenemos $d(a_n, a_m) = 0$.

Por lo tanto, obtenemos la siguiente cota para el medidor de Cauchy:

$$\gamma_a(q) = \sup_{m,n \geq q} d(a_n, a_m) \leq 2^{-q}.$$

Concluimos que la sucesión γ_a converge a 0. Luego a es de Cauchy.

Observación

La definición de *sucesión de Cauchy* involucra 4 cuantificadores.

Observación

La definición de *sucesión de Cauchy* involucra 4 cuantificadores.

La definición de *sucesión regular de Cauchy* utiliza solamente un cuantificador $\forall$ y por eso es mucho más simple.

Observación

La definición de *sucesión de Cauchy* involucra 4 cuantificadores.

La definición de *sucesión regular de Cauchy* utiliza solamente un cuantificador $\forall$ y por eso es mucho más simple.

Veremos que la clase de sucesiones regulares de Cauchy es suficiente para caracterizar la completez de espacios métricos.

Sucesiones estrictamente crecientes de números naturales

Lema

Sea $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una sucesión estrictamente creciente.

Entonces para cada k en $\mathbb{N}$ tenemos

$$\nu(k) \geq k.$$

Sucesiones estrictamente crecientes de números naturales

Lema

Sea $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una sucesión estrictamente creciente.

Entonces para cada k en $\mathbb{N}$ tenemos

$$\nu(k) \geq k.$$

Idea de demostración: por inducción.

pause Usamos el hecho que si $p, q \in \mathbb{N}$ y $p > q$, entonces $p \geq q + 1$.

Si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente, entonces converge al mismo punto

Proposición

Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy y sea $\nu \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente.
Supongamos que $b \in X$ y la sucesión $a \circ \nu \to b$.
Entonces $a \to b$.

Idea de demostración

Sea $\varepsilon > 0$.

Idea de demostración

Sea $\varepsilon > 0$.

Encontramos k_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_a(k_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Idea de demostración

Sea $\varepsilon > 0$.

Encontramos k_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_a(k_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Encontramos k_2 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall m \geq k_2 \qquad d(a_{\nu(m)}, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Idea de demostración

Sea $\varepsilon > 0$.

Encontramos k_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_a(k_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Encontramos k_2 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall m \geq k_2 \qquad d(a_{\nu(m)}, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pongamos $k_3 := \max\{k_1, k_2\}$.

Idea de demostración

Sea $\varepsilon > 0$.

Encontramos k_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_a(k_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Encontramos k_2 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall m \geq k_2 \qquad d(a_{\nu(m)}, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pongamos $k_3 := \max\{k_1, k_2\}$. Notamos que $\nu(k_3) \geq k_3$.

Idea de demostración

Sea $\varepsilon > 0$.

Encontramos k_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_a(k_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Encontramos k_2 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall m \geq k_2 \qquad d(a_{\nu(m)}, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pongamos $k_3 := \max\{k_1, k_2\}$. Notamos que $\nu(k_3) \geq k_3$.

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ con $n \geq k_3$ tenemos

$$d(a_n, b)$$

Idea de demostración

Sea $\varepsilon > 0$.

Encontramos k_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_a(k_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Encontramos k_2 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall m \geq k_2 \qquad d(a_{\nu(m)}, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pongamos $k_3 := \max\{k_1, k_2\}$. Notamos que $\nu(k_3) \geq k_3$.

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ con $n \geq k_3$ tenemos

$$d(a_n, b) \leq$$

Idea de demostración

Sea $\varepsilon > 0$.

Encontramos k_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_a(k_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Encontramos k_2 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall m \geq k_2 \qquad d(a_{\nu(m)}, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pongamos $k_3 := \max\{k_1, k_2\}$. Notamos que $\nu(k_3) \geq k_3$.

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ con $n \geq k_3$ tenemos

$$d(a_n, b) \leq d(a_n, a_{\nu(k_3)}) + d(a_{\nu(k_3)}, b)$$

Idea de demostración

Sea $\varepsilon > 0$.

Encontramos k_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_a(k_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Encontramos k_2 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall m \geq k_2 \qquad d(a_{\nu(m)}, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pongamos $k_3 := \max\{k_1, k_2\}$. Notamos que $\nu(k_3) \geq k_3$.

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ con $n \geq k_3$ tenemos

$$d(a_n, b) \leq d(a_n, a_{\nu(k_3)}) + d(a_{\nu(k_3)}, b) <$$

Idea de demostración

Sea $\varepsilon > 0$.

Encontramos k_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_a(k_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Encontramos k_2 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall m \geq k_2 \qquad d(a_{\nu(m)}, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pongamos $k_3 := \max\{k_1, k_2\}$. Notamos que $\nu(k_3) \geq k_3$.

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ con $n \geq k_3$ tenemos

$$d(a_n, b) \leq d(a_n, a_{\nu(k_3)}) + d(a_{\nu(k_3)}, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Idea de demostración

Sea $\varepsilon > 0$.

Encontramos k_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_a(k_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Encontramos k_2 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall m \geq k_2 \qquad d(a_{\nu(m)}, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pongamos $k_3 := \max\{k_1, k_2\}$. Notamos que $\nu(k_3) \geq k_3$.

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ con $n \geq k_3$ tenemos

$$d(a_n, b) \leq d(a_n, a_{\nu(k_3)}) + d(a_{\nu(k_3)}, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =$$

Idea de demostración

Sea $\varepsilon > 0$.

Encontramos k_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_a(k_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Encontramos k_2 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall m \geq k_2 \qquad d(a_{\nu(m)}, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pongamos $k_3 := \max\{k_1, k_2\}$. Notamos que $\nu(k_3) \geq k_3$.

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ con $n \geq k_3$ tenemos

$$d(a_n, b) \leq d(a_n, a_{\nu(k_3)}) + d(a_{\nu(k_3)}, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cada sucesión de Cauchy tiene una subsucesión regular de Cauchy

Proposición

Sea a una sucesión de Cauchy en X. Entonces existe una sucesión estrictamente creciente $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $a \circ \nu$ es regular de Cauchy.

Idea de demostración

Para cada k en $\mathbb{N}$ encontramos $\sigma(k)$ en $\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_a(\sigma(k)) < 2^{-k-1}.$$

Idea de demostración

Para cada k en $\mathbb{N}$ encontramos $\sigma(k)$ en $\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_a(\sigma(k)) < 2^{-k-1}.$$

Ponemos $\nu(1) := \sigma(1)$ y definimos la sucesión ν de manera inductiva:

$$\nu(k) := \max\{\nu(k-1)+1, \sigma(k)\}.$$

Criterio de completez en términos de sucesiones regulares de Cauchy

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces (X, d) es completo si, y solo si, cualquier sucesión regular de Cauchy en X converge.

Demostración

Necesidad.

Demostración

Necesidad.

Se sigue de la proposición que cada sucesión regular de Cauchy es de Cauchy.

Demostración

Necesidad.

Se sigue de la proposición que cada sucesión regular de Cauchy es de Cauchy.

Suficiencia.

Demostración

Necesidad.

Se sigue de la proposición que cada sucesión regular de Cauchy es de Cauchy.

Suficiencia.

Suponemos que cada sucesión regular de Cauchy en X converge.

Demostración

Necesidad.

Se sigue de la proposición que cada sucesión regular de Cauchy es de Cauchy.

Suficiencia.

Suponemos que cada sucesión regular de Cauchy en X converge.

Sea a una sucesión de Cauchy en X.

Demostración

Necesidad.

Se sigue de la proposición que cada sucesión regular de Cauchy es de Cauchy.

Suficiencia.

Suponemos que cada sucesión regular de Cauchy en X converge.

Sea a una sucesión de Cauchy en X.

Encontramos $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $a \circ \nu$ es regular de Cauchy.

Demostración

Necesidad.

Se sigue de la proposición que cada sucesión regular de Cauchy es de Cauchy.

Suficiencia.

Suponemos que cada sucesión regular de Cauchy en X converge.

Sea a una sucesión de Cauchy en X.

Encontramos $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $a \circ \nu$ es regular de Cauchy.

Por la suposición, existe b en X tal que $a \circ \nu \to b$.

Demostración

Necesidad.

Se sigue de la proposición que cada sucesión regular de Cauchy es de Cauchy.

Suficiencia.

Suponemos que cada sucesión regular de Cauchy en X converge.

Sea a una sucesión de Cauchy en X.

Encontramos $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $a \circ \nu$ es regular de Cauchy.

Por la suposición, existe b en X tal que $a \circ \nu \to b$.

Como a es de Cauchy y $a \circ \nu \to b$, concluimos que $a \to b$.