Sucesiones regulares de Cauchy

Objetivos. Definir la clase de *sucesiones regulares de Cauchy*. Es una subclase de la clase de sucesiones de Cauchy. Mostrar que la completez del espacio métrico se caracteriza en términos de sucesiones regulares de Cauchy.

Prerrequisitos. Sucesiones de Cauchy, el medidor de Cauchy de una sucesión, espacios métricos completos.

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

1 Definición (sucesión regular de Cauchy)**.** Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Se dice que a es *regular de Cauchy* si para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple la desigualdad

$$d(a_n, a_{n+1}) < 2^{-n-1}.$$

2 Proposición. *Sea a una sucesión regular de Cauchy en X. Entonces a es de Cauchy.*

Demostración. Sea $q \in \mathbb{N}$ y sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq q$. Si $m > n$, entonces

$$d(a_n, a_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} 2^{k+1} < 2^{-n} \leq 2^{-q}.$$

El caso $m < n$ se considera de manera similar, y en el caso $m = n$ tenemos $d(a_n, a_m) = 0$. Por lo tanto,

$$\gamma_a(q) \leq 2^{-q}.$$

Concluimos que la sucesión γ_a converge a 0. Luego a es de Cauchy. □

3 Observación. La definición de *sucesión de Cauchy* involucra 4 cuantificadores. La definición de *sucesión regular de Cauchy* utiliza solamente un cuantificador $\forall$ y por eso es mucho más simple. Veremos que la clase de sucesiones regulares de Cauchy es suficiente para caracterizar la completez de espacios métricos.

4 Lema. *Sea $\nu \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una sucesión estrictamente creciente. Entonces para cada k en $\mathbb{N}$ tenemos*

$$\nu(k) \geq k.$$

Demostración. Por inducción. Usamos el hecho que si $p, q \in \mathbb{N}$ y $p > q$, entonces $p \geq q + 1$. $\square$

5 Proposición (si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente, entonces converge al mismo punto)**.** *Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy y sea $\nu \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente. Supongamos que $b \in X$ y la sucesión $a \circ \nu$ converge al punto b. Entonces la sucesión a también converge al punto b.*

Idea de demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Encontramos k_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_a(k_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Encontramos k_2 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall m \geq k_2 \qquad d(a_{\nu(m)}, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pongamos $k_3 \coloneqq \max\{k_1, k_2\}$. Por el Lema 4, se cumple la desigualdad $\nu(k_3) \geq k_3$. Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ con $n \geq k_3$ tenemos

$$d(a_n, b) \leq d(a_n, a_{\nu(k_3)}) + d(a_{\nu(k_3)}, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

6 Proposición. *Sea a una sucesión de Cauchy en X. Entonces existe una sucesión estrictamente creciente $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $a \circ \nu$ es regular de Cauchy.*

Idea de demostración. Para cada k en $\mathbb{N}$ encontramos $\sigma(k)$ en $\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_a(\sigma(k)) < 2^{-k-1}.$$

Ponemos $\nu(1) \coloneqq \sigma(1)$ y definimos la sucesión ν de manera inductiva:

$$\nu(k) \coloneqq \max\{\nu(k-1) + 1, \sigma(k)\}. \qquad \square$$

7 Proposición. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces (X, d) es completo si, y solo si, cualquier sucesión regular de Cauchy en X converge.*

Demostración. La necesidad se sigue de la Proposición 2.

Demostremos la suficiencia. Sea a una sucesión de Cauchy en X. Aplicamos la Proposición 6 y encontramos $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $a \circ \nu$ es regular de Cauchy. Por la suposición, existe b en X tal que $a \circ \nu \to b$. Por la Proposición 5, $a \to b$. $\square$