Núcleos reales

Objetivos. Definir el concepto de *núcleos reales*, conocidos también como *funciones positivamente definidas en el sentido no estricto*. Demostrar el criterio en términos de determinantes (el criterio de Sylvester para núcleos) y la desigualdad de Schwarz para núcleos.

Prerrequisitos. Matrices positivas, el criterio de Sylvester para matrices positivas.

Una función $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$ se llama *simétrica*, si para cada x, y en X se cumple la igualdad $K(y,x) = K(x,y)$.

1 Definición (núcleo real)**.** Sea X un conjunto. Una función $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$ se llama *núcleo real*, si K es simétrica y para cada m, cualesquiera $x_1, \ldots, x_m$ en X y cualesquiera $\xi_1, \ldots, \xi_m$ en $\mathbb{R}$,

$$\sum_{r,s=1}^{m} \xi_r \, \xi_s \, K(x_r, x_s) \geq 0.$$

Identificamos la función K de clase $\mathbb{R}^{X^2}$ con la familia de funciones $(K_x)_{x\in X}$ de clase $\mathbb{R}^X$, poniendo

$$K_x(y) \coloneqq K(y,x).$$

Consideramos el conjunto de funciones $\mathbb{R}^X$ como espacio vectorial real, con operaciones naturales (punto a punto).

2 Definición. Sean $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$. Denotamos por $G_K(x_1, \ldots, x_m)$ la siguiente matriz:

$$G_K(x_1, \ldots, x_m) \coloneqq \big[K(x_r, x_s)\big]_{r,s=1}^{m} = \big[K_{x_s}(x_r)\big]_{r,s=1}^{m}.$$

La matriz $G_K(x_1, \ldots, x_m)$ se conoce como la matriz de Gram asociada a la función K y los puntos $x_1, \ldots, x_m$. Estas matrices aparecen en trabajos de Mercer, Moore, y otros matemáticos.

Dada una matriz A de clase $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, denotemos por q_A su forma cuadrática:

$$q_A(\xi) \coloneqq \langle A\xi, \xi\rangle = \xi^\top A\xi = \sum_{r,s=1}^{m} A_{r,s}\xi_r\xi_s.$$

3 Proposición (repaso: criterio de matrices reales positivas)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) Existe B en $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ tal que $A = B^\top B$.

(b) $A^\top = A$ y $\operatorname{Sp}(A) \subseteq [0, +\infty)$.

(c) $A^\top = A$ y $q_A \geq 0$, esto es, $\langle A\xi, \xi\rangle \geq 0$ para cada ξ en $\mathbb{R}^n$.

(d) $A^\top = A$ y para cada $J \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $\det(A_J^J) \geq 0$.

Usamos la notación $A \geq 0$, cuando la matriz A cumple con alguna condición de la Proposición 3. La equivalencia de las condiciones (c) y (d) en la Proposición 3 se conoce como el criterio de Sylvester.

4 Proposición (criterio de núcleo real en términos de matrices positivas)**.** *Sea $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) K es un núcleo;

(b) para cada m en $\mathbb{N}$ y cada $x_1, \ldots, x_m$ en X, $\quad G_K(x_1, \ldots, x_m) \geq 0$.

Demostración. Primero probemos que la condición (b) implica la simetría de la función K. Sean $x, y \in X$. Consideramos la matriz $G_K(x, y)$:

$$G_K(x, y) = \begin{bmatrix} K(x,x) & K(x,y) \\ K(y,x) & K(y,y) \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Por la condición (b), tenemos que $G_K(x, y) \geq 0$. Esto implica que la matriz $G_K(x, y)$ es simétrica. Por lo tanto, $K(y, x) = K(x, y)$.

Dados m en $\mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_m$, consideremos la forma cuadrática $q\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ asociada a la matriz $G_K(x_1, \ldots, x_m)$:

$$q(\xi) \coloneqq \langle G_K(x_1, \ldots, x_m)\xi, \xi\rangle = \xi^\top G_K(x_1, \ldots, x_m)\xi.$$

En términos de las componentes de λ,

$$\begin{aligned} q(\xi) &= \sum_{r=1}^m \xi_r \left(G_K(x_1, \ldots, x_m)\,\xi\right)_r = \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \xi_r \xi_s (G_K(x_1, \ldots, x_m))_{r,s} \\ &= \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \xi_r \xi_s K(x_r, x_s). \end{aligned}$$

La última suma doble coincide con la expresión escrita en la Definición 1. La condición $q \geq 0$ significa que $G_K(x_1, \ldots, x_m) \geq 0$. $\square$

5 Proposición (criterio de Sylvester para núcleos reales)**.** *Sea* $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$. *Supongamos que* $K(y, x) = K(x, y)$ *para cada* x, y *en* X. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) K *es un núcleo;*

(b) para cada m *en* $\mathbb{N}$ *y cada* $x_1, \ldots, x_m$ *en* X,

$$\det(G_K(x_1, \ldots, x_m)) \geq 0.$$

Demostración. Sea K un núcleo y sean $x_1, \ldots, x_m \in X$. Entonces $G_K(x_1, \ldots, x_m) \geq 0$. Por el criterio de Sylvester, esto implica que $\det(G_K(x_1, \ldots, x_m)) \geq 0$.

Supongamos que se cumple la condición (b). Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$. Pongamos $A \coloneqq G_K(x_1, \ldots, x_m)$. Tenemos que trabajar con los "menores principales" de la matriz A, en el sentido general. Dado un subconjunto $J = \{j_1, \ldots, j_p\}$ de $\{1, \ldots, m\}$, consideramos la submatriz de la matriz A ubicada en los renglones y las columnas del conjunto J:

$$A_J^J \coloneqq \left[A_{j_r, j_s}\right]_{r,s=1}^{p}.$$

Observamos que

$$A_J^J = \left[K(x_{j_r}, x_{j_s})\right]_{r,s=1}^{p} = G_K(x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}).$$

Aplicamos la condición (b) con los puntos $x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}$ y concluimos que $\det(A_J^J) \geq 0$. El subconjunto J de $\{1, \ldots, m\}$ es general. Debido al criterio de Sylvester, hemos demostrado que $A \geq 0$. $\square$

6 Proposición (la desigualdad de Schwarz para los núcleos)**.** *Sea* $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$ *un núcleo y sean* $x, y \in X$. *Entonces*

$$|K(x, y)|^2 \leq K(x, x)K(y, y). \tag{2}$$

Demostración. Consideremos la matriz (1). Por la Proposición 5, tenemos que

$$\det(G_K(x, y)) \geq 0,$$

esto es,

$$K(x, x)K(y, y) - K(x, y)^2 \geq 0. \qquad \square$$

Idea de segunda demostración. Se puede razonar similar a la demostración de la desigualdad de Schwarz para los semi-productos internos, aplicando la definición del núcleo con escalares ξ_1, ξ_2 apropiados. $\square$