Funciones medibles reales y complejas

Objetivos. Estudiar funciones medibles con valores reales y con valores complejos.

Requisitos. σ-álgebras, la preimagen de un conjunto bajo una función, funciones medibles con valores en un espacio topológico, la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ está generada por los rayos derechos; la σ-álgebra de Borel de $\overline{\mathbb{R}}$ está generada por los rayos derechos, todo conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$ es una unión numerable de rectángulos abiertos.

Medibilidad de funciones con valores reales

1 Proposición (la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ está generada por los rayos derechos, repaso)**.** *La σ-álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ está generada por $\{(a,+\infty)\colon a \in \mathbb{R}\}$.*

2 Proposición (criterio de medibilidad de una función real)**.** *Sea $(X,\mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f es $\mathcal{F}$-medible.

(b) para todo $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}[(a,+\infty)] \in \mathcal{F}$.

3 Proposición (la σ-álgebra de Borel de $\overline{\mathbb{R}}$ está generada por los rayos derechos, repaso)**.** *La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ está generada por*

$$\big\{(a,+\infty]\colon a \in \mathbb{R}\big\}.$$

4 Proposición (criterio de medibilidad de una función con valores en el eje extendido)**.** *Sea $(X,\mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f es $\mathcal{F}$-medible.

(b) para todo a en $\mathbb{R}$, $f^{-1}[(a,+\infty]] \in \mathcal{F}$.

5 Proposición (cada conjunto abierto en el plano es una unión numerable de rectángulos abiertos, repaso)**.** *Sea A un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$, $A \neq \varnothing$. Entonces existe una sucesión de rectángulos abiertos $\big((a_k,b_k)\times(c_k,d_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (a_k,b_k)\times(c_k,d_k).$$

6 Teorema (sobre la composición de dos funciones medibles con una función continua de dos argumentos)**.** *Sea* $(X, \mathcal{F})$ *un espacio medible, sean* $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$*, sea* Y *un espacio topológico y sea* $\Phi \in C(\mathbb{R}^2, Y)$*. Definimos*

$$h\colon X \to Y, \qquad h(x) \coloneqq \Phi(f(x), g(x)),$$

Entonces $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)$*.*

Demostración. Sea B un conjunto abierto arbitrario en Y. Tenemos por demostrar que el conjunto $C \coloneqq h^{-1}[B]$ es $\mathcal{F}$-medible.

Pongamos $A \coloneqq \Phi^{-1}[B]$. Como Φ es continua, A es abierto en $\mathbb{R}^2$. Por el lema existe una sucesión de rectángulos $\big((a_n, b_n) \times (c_n, d_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n) \times (c_n, d_n).$$

Consideremos el conjunto C:

$$\begin{aligned} C &= \Big\{x \in X\colon \Phi(f(x), g(x)) \in B\Big\} = \Big\{x \in X\colon (f(x), g(x)) \in A\Big\} \\ &= \Big\{x \in X\colon (f(x), g(x)) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)\Big\} \\ &= \Big\{x \in X\colon\ \exists n \in \mathbb{N}\ (f(x), g(x)) \in (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)\Big\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{x \in X\colon (f(x), g(x)) \in (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)\Big\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{x \in X\colon\ f(x) \in (a_n, b_n)\ \wedge g(x) \in (c_n, d_n)\Big\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(f^{-1}[(a_n, b_n)] \cap g^{-1}[(c_n, d_n)]\Big). \end{aligned}$$

Hemos demostrado que

$$C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(f^{-1}[(a_n, b_n)] \cap g^{-1}[(c_n, d_n)]\Big). \tag{1}$$

Las funciones f y g son $\mathcal{F}$-medibles y los conjuntos (a_n, b_n), (c_n, d_n) son de Borel, por lo tanto sus preimágenes son $\mathcal{F}$-medibles:

$$f^{-1}[(a_n, b_n)] \in \mathcal{F}, \quad g^{-1}[(c_n, d_n)] \in \mathcal{F}.$$

Ahora de la representación (1) se sigue que $C \in \mathcal{F}$. □

Medibilidad de funciones con valores complejos

Suponemos que $(X, \mathcal{F})$ es un espacio medible.

7 Proposición (criterio de medibilidad de una función compleja)**.** *Sea* $f\colon X \to \mathbb{C}$. *Entonces* f *es* $\mathcal{F}$*-medible si y sólo si su parte real* $\operatorname{Re}(f)$ *y su parte imaginaria* $\operatorname{Im}(f)$ *ambas son* $\mathcal{F}$*-medibles.*

8 Ejercicio (el valor absoluto de una función compleja medible es medible)**.** Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demostrar que es medible la función $|f|$, definida mediante le siguiente regla:

$$|f|(x) = |f(x)| \qquad \forall x \in X.$$

9 Ejercicio (la descomposición polar de una función compleja medible)**.** Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demostrar que existe $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que $|g| = 1$ y $f = g|f|$.

Operaciones aritméticas con funciones medibles

Suponemos que $(X, \mathcal{F})$ es un espacio medible.

10 Proposición (la continuidad de la adición de números reales)**.** *Sea* $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(u, v) \coloneqq u + v$. *Entonces* $\Phi \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

11 Proposición (la continuidad de la adición de números reales)**.** *Sea* $\Psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Psi(u, v) \coloneqq uv$. *Entonces* $\Psi \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

12 Ejercicio. Demostrar las dos proposiciones anteriores. Indicación. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Hay que construir $\delta > 0$ tal que para cualesquiera x, y en $\mathbb{R}$ con

$$|x - a| < \delta, \qquad |y - b| < \delta,$$

se cumpla la desigualdad $|xy - ab| < \varepsilon$.

13 Proposición (la suma y el producto de dos funciones reales medibles son medibles)**.** *Sean* $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. *Entonces* $f + g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ *y* $fg \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$.

Demostración. Aplicar el Teorema 6 con $\Phi(u, v) \coloneqq u + v$, luego con $\Phi(u, v) \coloneqq uv$. □

14 Proposición (la suma y el producto de dos funciones complejas medibles son medibles)**.** *Sean* $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ *funciones* $\mathcal{F}$*-medibles. Entonces* $f + g$ *y* fg *son* $\mathcal{F}$*-medibles.*

El supremo y el ínfimo de funciones medibles

15 Proposición (el supremo de una sucesión de funciones medibles)**.** *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\overline{\mathbb{R}})$. *Definimos* $g\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$,

$$g(x)=\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\qquad (x\in X).$$

Entonces $g\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\overline{\mathbb{R}})$.

Idea de la demostración. Para todo a en $\mathbb{R}$ y todo x en X,

$$g(x)>a\qquad\Longleftrightarrow\qquad \exists n\in\mathbb{N}\quad f_n(x)>a.$$

Por lo tanto,

$$g^{-1}[(a,+\infty]]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}[(a,+\infty]].\qquad\square$$

16 Ejercicio. Enunciar y demostrar una proposición similar para el ínfimo de una sucesión de funciones medibles.

17 Corolario (el máximo y el mínimo de dos funciones medibles)**.** *Sean* $f,g\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ *funciones* $\mathcal{F}$*-medibles. Entonces las funciones* $u,v\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$*, definidas como*

$$u(x):=\max\{f(x),g(x)\},\qquad v(x):=\min\{f(x),g(x)\},$$

son $\mathcal{F}$*-medibles.*

La parte positiva y la parte negativa

18 Definición (la parte positiva y la parte negativa de números reales)**.** Definimos $P\colon\mathbb{R}\to[0,+\infty)$, $N\colon\mathbb{R}\to[0,+\infty)$,

$$P(t):=\begin{cases} t, & t\ge 0,\\ 0, & t<0;\end{cases}\qquad N(t):=\begin{cases} 0, & t\ge 0,\\ -t, & t<0.\end{cases}$$

19 Ejercicio. Demostrar que las funciones P y N son continuas, y para cualquier t en $\mathbb{R}$

$$P(t)-N(t)=t,\qquad P(t)+N(t)=|t|,$$

$$P(t)=\frac{|t|+t}{2},\qquad N(t)=\frac{|t|-t}{2}.$$

Demostrar que para cualquier t en $\mathbb{R}$,

$$P(t)=\max\{t,0\},\qquad N(t)=\max\{-t,0\}.$$

20 Definición (la parte positiva y la parte negativa de una función)**.** Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$. Entonces la *parte positiva* y la *parte negativa* de f se definen mediante las siguientes reglas:

$$f_+(x) \coloneqq P(f(x)), \qquad f_-(x) \coloneqq N(f(x)).$$

21 Ejercicio. Demostrar que

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, \qquad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

22 Ejercicio. Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$. Demostrar que

$$f = f_+ - f_-, \qquad |f| = f_+ + f_-, \qquad f_+ = \frac{f + |f|}{2}, \qquad f_- = \frac{|f| - f}{2}.$$

23 Corolario (la parte positiva y parte negativa de una función medible)**.** *Sea* $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. *Entonces* $f_+, f_- \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.

Límites de funciones medibles

24 Proposición (el límite superior y límite inferior de una sucesión de funciones medibles)**.** *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. *Entonces las funciones* g *y* h *definidas mediante*

$$g(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x), \qquad h(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in X)$$

también son $\mathcal{F}$*-medibles.*

25 Corolario (el límite puntual de una sucesión de funciones medibles es medible)**.** *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones* $\mathcal{F}$*-medibles reales o complejas. Supongamos que para todo* $x \in X$ *existe* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. *Lo denotemos por* $g(x)$. *Entonces la función* g *es* $\mathcal{F}$*-medible.*