Funciones medibles reales y complejas

Objetivos. Estudiar funciones medibles con valores reales y con valores complejos.

Requisitos. σ-álgebras, preimagen de un conjunto bajo una función, funciones medibles con valores en un espacio topológico, la σ-álgebra de Borel del eje real está generada por los rayos derechos; la σ-álgebra de Borel del eje real extendido está generada por los rayos derechos, todo conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$ es una unión numerable de rectángulos abiertos.

Medibilidad de funciones con valores reales

1. Proposición (repaso). La σ-álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ está generada por $\{(a,+\infty)\colon a\in\mathbb{R}\}$.

2. Proposición (criterio de medibilidad de una función real). Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sea $f\colon X\to\mathbb{R}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es $\mathcal{F}$-medible.

(b) para todo $a\in\mathbb{R}$, $f^{-1}[(a,+\infty)]\in\mathcal{F}$.

3. Proposición (repaso). La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ está generada por

$$\big\{(a,+\infty]\colon a\in\mathbb{R}\big\}.$$

4. Proposición (criterio de medibilidad de una función con valores en el eje extendido). Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sea $f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es $\mathcal{F}$-medible.

(b) para todo $a\in\mathbb{R}$, $f^{-1}[(a,+\infty]]\in\mathcal{F}$.

5. Proposición (de la estructura de los conjuntos abiertos en el plano euclidiano, repaso). Sea A un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$, $A \neq \varnothing$. Entonces existe una sucesión de rectángulos abiertos $\big((a_k, b_k) \times (c_k, d_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ que cubre el conjunto A:

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (a_k, b_k) \times (c_k, d_k).$$

6. Teorema (composición de dos funciones medibles con una función continua de dos argumentos). Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$, sea Y un espacio topológico y sea $\Phi \in C(\mathbb{R}^2, Y)$. Entonces la función

$$h\colon X \to Y, \qquad h(x) := \Phi(f(x), g(x)),$$

es $\mathcal{F}$-medible.

Demostración. Sea B un conjunto abierto arbitrario en Y. Tenemos por demostrar que el conjunto $C := h^{-1}[B]$ es $\mathcal{F}$-medible.

Pongamos $A := \Phi^{-1}[B]$. Como Φ es continua, A es abierto en $\mathbb{R}^2$. Por el lema existe una sucesión de rectángulos $\big((a_n, b_n) \times (c_n, d_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n) \times (c_n, d_n).$$

Consideremos el conjunto C:

$$\begin{aligned}
C &= \Big\{x \in X\colon \Phi(f(x), g(x)) \in B\Big\} = \Big\{x \in X\colon (f(x), g(x)) \in A\Big\} \\
&= \Big\{x \in X\colon (f(x), g(x)) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)\Big\} \\
&= \Big\{x \in X\colon\ \exists n \in \mathbb{N}\ (f(x), g(x)) \in (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)\Big\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{x \in X\colon (f(x), g(x)) \in (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)\Big\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{x \in X\colon\ f(x) \in (a_n, b_n)\ \wedge g(x) \in (c_n, d_n)\Big\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(f^{-1}[(a_n, b_n)] \cap g^{-1}[(c_n, d_n)]\Big). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Las funciones f y g son $\mathcal{F}$-medibles y los conjuntos (a_n, b_n), (c_n, d_n) son de Borel, por lo tanto sus preimágenes son $\mathcal{F}$-medibles. Ahora de la representación (1) sigue que $C \in \mathcal{F}$. $\square$

Medibilidad de funciones con valores complejos

7. Proposición (criterio de medibilidad de una función compleja). Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sea $f\colon X \to \mathbb{C}$. Entonces f es $\mathcal{F}$-medible si y sólo si su parte real $\operatorname{Re}(f)$ y su parte imaginaria $\operatorname{Im}(f)$ ambas son $\mathcal{F}$-medibles.

8. Ejercicio (valor absoluto de una función compleja medible es medible). Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ una función $\mathcal{F}$-medible. Entonces es medible la función $|f|$, definida mediante le siguiente regla:

$$|f|(x) = |f(x)| \qquad \forall x \in X.$$

9. Proposición (descomposición polar de una función compleja medible). Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ una función compleja $\mathcal{F}$-medible. Entonces existe una función compleja $\mathcal{F}$-medible $g\colon X \to \mathbb{C}$ tal que $|g| = 1$ y $f = g|f|$.

Operaciones aritméticas con funciones medibles

10. Proposición (suma y producto de funciones reales medibles son medibles). Sean $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ funciones $\mathcal{F}$-medibles. Entonces $f + g$ y fg son $\mathcal{F}$-medibles.

11. Proposición (suma y producto de funciones complejas medibles son medibles). Sean $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ funciones $\mathcal{F}$-medibles. Entonces $f + g$ y fg son $\mathcal{F}$-medibles.

Supremo e ínfimo de funciones medibles

12. Proposición (supremo de una sucesión de funciones medibles). Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \overline{\mathbb{R}}$. Entonces la función g definida mediante

$$g(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \qquad (x \in X)$$

también es $\mathcal{F}$-medible.

Idea de la demostración. Para todo $a \in \mathbb{R}$ y todo $x \in X$,

$$g(x) > a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) > a.$$

Por lo tanto,

$$g^{-1}[(a, +\infty]] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}[(a, +\infty]]. \qquad \square$$

13. Ejercicio. Enuncie y demuestre una proposición similar para el ínfimo de una sucesión de funciones medibles.

14. Corolario (máximo y mínimo de dos funciones medibles). Sean $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones $\mathcal{F}$-medibles. Entonces las funciones $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$ son $\mathcal{F}$-medibles.

Parte positiva y parte negativa

15. Definición (parte positiva y parte negativa de una función). Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función. Entonces la *parte positiva* y la *parte negativa* de f se definen mediante las siguientes reglas:

$$f_+(x) \coloneqq \max\{f(x), 0\}, \qquad f_-(x) \coloneqq \min\{-f(x), 0\}.$$

16. Ejercicio. Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$. Muestre que

$$f = f_+ - f_-, \qquad |f| = f_+ + f_-, \qquad f_+ = \frac{f + |f|}{2}, \qquad f_- = \frac{|f| - f}{2}.$$

17. Corolario (parte positiva y parte negativa de una función medible). Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Entonces $f_+, f_- \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$.

Límites de funciones medibles

18. Proposición (límite superior y límite inferior de una sucesión de funciones medibles). Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{R}$. Entonces las funciones g y h definidas mediante

$$g(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x), \qquad h(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in X)$$

también son $\mathcal{F}$-medibles.

19. Corolario (límite puntual de una sucesión de funciones medibles es medible). Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{F}$-medibles reales o complejas. Supongamos que para todo $x \in X$ existe $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Lo denotemos por $g(x)$. Entonces la función g es $\mathcal{F}$-medible.