La forma cuadrática asociada a la forma sesquilineal

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

Objetivos. Dada una función sesquilineal $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$, consideremos la función q_f que se obtiene al evaluar f en la "diagonal principal" del dominio (es decir, cuando los dos argumentos coinciden):

$$q_f(x) \coloneqq f(x,x).$$

Vamos a estudiar algunas propiedades elementales de q y conocer algunos ejemplos.

Prerrequisitos. Formas sesquilineales (= funciones sesquilineales).

1 Definición. Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. La *forma cuadrática* asociada a f se define como $q_f\colon V \to \mathbb{C}$,

$$q_f(x) \coloneqq f(x,x) \qquad (x \in H).$$

Ejemplos

2 Ejemplo (la forma cuadrática asociada a una matriz cuadrada)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Definimos $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(x,y) \coloneqq y^* A x,$$

donde y^* es el vector transpuesto conjugado:

$$y^* = \left[\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}\right].$$

Entonces $q_f(x) = x^* A x$. Escribir $q_f(x)$ mediante una suma doble, en términos de las componentes de A y x.

3 Ejemplo (la forma cuadrática asociada a una matriz diagonal)**.** Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Consideramos la matriz diagonal $D \coloneqq \operatorname{diag}(a) = \left[a_j \delta_{j,k}\right]_{j,k=1}^n$, le asociamos la forma sesquilineal $f(x,y) \coloneqq y^* D x$ y luego la forma cuadrática $q_f(x) = x^* D x$. Es fácil ver que en este ejemplo

$$q_f(x) = \sum_{k=1}^n a_j |x_j|^2.$$

Propiedades elementales

En las siguientes proposiciones suponemos que $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal y $q\colon V \to \mathbb{C}$ es la forma cuadrática asociada a f. Tratamos f como una función fija, por eso usamos la notación simplificada q en vez de la notación más precisa q_f.

4 Proposición (la forma cuadrática es absolutamente homogénea de orden 2)**.** *Para cada a en V y cada λ en $\mathbb{C}$,*

$$q(\lambda a) = |\lambda|^2 q(a).$$

Demostración. Escribimos q en términos de f, luego aplicamos la propiedad homogénea respecto al primer argumento y la propiedad homogénea conjugada respecto al segundo argumento:

$$q(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a,a) = |\lambda|^2\,q(a). \qquad \square$$

5 Proposición (la forma cuadrática evaluada en el vector opuesto)**.** *Para cada a en V,*

$$q(-a) = q(a).$$

Demostración. Es un caso particular de la Proposición 4. $\square$

6 Proposición (la forma cuadrática evaluada en la suma de dos vectores)**.** *Para cualesquiera a, b en V,*

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b). \tag{1}$$

Demostración. Escribimos q en términos de f, luego aplicamos la propiedad aditiva de f respecto al primer y segundo argumento:

$$\begin{aligned} q(a+b) &= f(a+b, a+b) = f(a, a+b) + f(b, a+b) \\ &= f(a,a) + f(a,b) + f(b,a) + f(b,b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b). \end{aligned} \qquad \square$$

7 Proposición (la identidad de Pitágoras para formas sesquilineales)**.** *Sean $a, b \in V$ tales que $f(a,b) = 0$ y $f(b,a) = 0$. Entonces*

$$q(a+b) = q(a) + q(b).$$

Demostración. Se sigue de la Proposición 6. $\square$

8 Proposición (la identidad de paralelogramo para las formas sesquilineales)**.** *Para cualesquiera a, b en V,*

$$q(a+b) + q(a-b) = 2(q(a) + q(b)). \tag{2}$$

Demostración. Recordemos la identidad (1):

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Sustituimos $-b$ en vez de b:

$$q(a-b) = q(a) - f(a,b) - f(b,a) + q(b).$$

Al sumar estas dos igualdades obtenemos (2). □

9 Ejercicio (ejemplo de función que no es forma cuadrática)**.** Definimos $h\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$,

$$h(x) \coloneqq x_1^3 + x_2^2.$$

- Encontrar x, y en $\mathbb{C}^2$ tales que

$$h(x+y) + h(x-y) \neq 2(h(x) + h(y)).$$

- Encontrar x en $\mathbb{C}^2$ y λ en $\mathbb{C}$ tales que

$$h(\lambda x) \neq |\lambda|^2 h(x).$$

- Usando alguno de los incisos anteriores mostrar que h no es forma cuadrática.

10 Ejercicio. Denotemos por Q al conjunto de las funciones $V \to \mathbb{C}$ que se pueden representar como formas cuadráticas:

$$Q \coloneqq \left\{ g \in \mathbb{C}^V : \quad \exists f \in \mathbb{C}^{V^2} \quad f \text{ es una forma sesquilineal}, \quad g = q_f \right\}.$$

Demostrar que Q es un espacio vectorial.