Espacios pseudométricos
(un tema de la unidad “Espacios métricos”)

Egor Maximenko,

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

31 de agosto de 2022

Objetivos.

- Estudiar la definición del espacio pseudométrico.
- Estudiar la construcción de un espacio métrico a partir de un espacio pseudométrico.

Prerrequisitos.

- Espacios métricos.
- Relaciones de equivalencia y clases de equivalencia.

Definición

Sea X un conjunto y sea $d\colon X \times X \to [0, +\infty)$ una función.

Se dice que d es una pseudodistancia en X, si se tienen las siguientes propiedades.

(D1) Desigualdad del triángulo:

$$\forall x, y, z \in X \qquad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

(D2) Propiedad simétrica:

$$\forall x, y \in X \qquad d(x, y) = d(y, x).$$

(D3) Para cada x en X, $\quad d(x, x) = 0$.

Definición

Sea X un conjunto y sea $d\colon X \times X \to [0, +\infty)$ una función.

Se dice que d es una pseudodistancia en X, si se tienen las siguientes propiedades.

(D1) Desigualdad del triángulo:

$$\forall x, y, z \in X \qquad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

(D2) Propiedad simétrica:

$$\forall x, y \in X \qquad d(x, y) = d(y, x).$$

(D3) Para cada x en X, $\quad d(x, x) = 0$.

A diferencia de la definición de distancia, ahora no exigimos la separación de puntos.

Espacio pseudométrico

En vez de la palabra “pseudodistancia”, se usa también la palabra “pseudométrica”.

Espacio pseudométrico

En vez de la palabra "pseudodistancia", se usa también la palabra "pseudométrica".

Definición

Sea X un conjunto y sea d una pseudodistancia en X.

Entonces se dice que (X, d) es un espacio pseudométrico.

Ejemplo

Sea $X = \mathbb{R}^2$. Definimos $f\colon X^2 \to [0, +\infty)$,

$$f(a, b) := |a_1 - b_1|.$$

Entonces f es una pseudodistancia en $\mathbb{R}^2$.

Algunas propiedades

En espacios pseudométricos se cumplen algunas propiedades de espacios métricos.

Algunas propiedades

En espacios pseudométricos se cumplen algunas propiedades de espacios métricos.

Proposición (la desigualdad poligonal)

Sea (X, d) un espacio pseudométrico, sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $x_1, \ldots, x_m$ una lista de puntos en X. Entonces

$$d(x_1, x_m) \leq \sum_{k=1}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}).$$

Algunas propiedades

En espacios pseudométricos se cumplen algunas propiedades de espacios métricos.

Proposición (la desigualdad poligonal)

Sea (X, d) un espacio pseudométrico, sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $x_1, \ldots, x_m$ una lista de puntos en X. Entonces

$$d(x_1, x_m) \leq \sum_{k=1}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}).$$

Proposición (la desigualdad invertida del triángulo)

Sea (X, d) un espacio pseudométrica y sean $a, b, c \in X$. Entonces

$$\big| d(a, b) - d(a, c) \big| \leq d(b, c).$$

La desigualdad de cuadrilátero

Proposición

Sea (X, d) un espacio pseudométrico y sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in X$. Entonces

$$\left|d(a_1, a_2) - d(a_3, a_4)\right| \leq d(a_1, a_3) + d(a_2, a_4).$$

Demostración

$$t := d(a_1, a_2) - d(a_3, a_4), \qquad s := d(a_1, a_3) + d(a_2, a_4).$$

Demostración

$$t := d(a_1, a_2) - d(a_3, a_4), \qquad s := d(a_1, a_3) + d(a_2, a_4).$$

1. Por la desigualdad poligonal y la propiedad simétrica,

$$d(a_1, a_2) \leq$$

Demostración

$$t := d(a_1, a_2) - d(a_3, a_4), \qquad s := d(a_1, a_3) + d(a_2, a_4).$$

1. Por la desigualdad poligonal y la propiedad simétrica,

$$d(a_1, a_2) \leq d(a_1, a_3) + d(a_3, a_4) + \underbrace{d(a_4, a_2)}_{d(a_2,a_4)},$$

Demostración

$$t := d(a_1, a_2) - d(a_3, a_4), \qquad s := d(a_1, a_3) + d(a_2, a_4).$$

1. Por la desigualdad poligonal y la propiedad simétrica,

$$d(a_1, a_2) \leq d(a_1, a_3) + d(a_3, a_4) + \underbrace{d(a_4, a_2)}_{d(a_2, a_4)}, \qquad \text{por eso} \qquad t \leq s.$$

Demostración

$$t := d(a_1, a_2) - d(a_3, a_4), \qquad s := d(a_1, a_3) + d(a_2, a_4).$$

1. Por la desigualdad poligonal y la propiedad simétrica,

$$d(a_1, a_2) \leq d(a_1, a_3) + d(a_3, a_4) + \underbrace{d(a_4, a_2)}_{d(a_2,a_4)}, \qquad \text{por eso} \qquad t \leq s.$$

2. Por la desigualdad poligonal y la propiedad simétrica,

$$d(a_3, a_4) \leq$$

Demostración

$$t := d(a_1, a_2) - d(a_3, a_4), \qquad s := d(a_1, a_3) + d(a_2, a_4).$$

1. Por la desigualdad poligonal y la propiedad simétrica,

$$d(a_1, a_2) \leq d(a_1, a_3) + d(a_3, a_4) + \underbrace{d(a_4, a_2)}_{d(a_2, a_4)}, \qquad \text{por eso} \qquad t \leq s.$$

2. Por la desigualdad poligonal y la propiedad simétrica,

$$d(a_3, a_4) \leq \underbrace{d(a_3, a_1)}_{d(a_1, a_3)} + d(a_1, a_2) + d(a_2, a_4),$$

Demostración

$$t := d(a_1, a_2) - d(a_3, a_4), \qquad s := d(a_1, a_3) + d(a_2, a_4).$$

1. Por la desigualdad poligonal y la propiedad simétrica,

$$d(a_1, a_2) \leq d(a_1, a_3) + d(a_3, a_4) + \underbrace{d(a_4, a_2)}_{d(a_2, a_4)}, \qquad \text{por eso} \qquad t \leq s.$$

2. Por la desigualdad poligonal y la propiedad simétrica,

$$d(a_3, a_4) \leq \underbrace{d(a_3, a_1)}_{d(a_1, a_3)} + d(a_1, a_2) + d(a_2, a_4), \qquad \text{por eso} \qquad -t \leq s.$$

Demostración

$$t := d(a_1, a_2) - d(a_3, a_4), \qquad s := d(a_1, a_3) + d(a_2, a_4).$$

1. Por la desigualdad poligonal y la propiedad simétrica,

$$d(a_1, a_2) \leq d(a_1, a_3) + d(a_3, a_4) + \underbrace{d(a_4, a_2)}_{d(a_2, a_4)}, \qquad \text{por eso} \qquad t \leq s.$$

2. Por la desigualdad poligonal y la propiedad simétrica,

$$d(a_3, a_4) \leq \underbrace{d(a_3, a_1)}_{d(a_1, a_3)} + d(a_1, a_2) + d(a_2, a_4), \qquad \text{por eso} \qquad -t \leq s.$$

De 1 y 2 concluimos que $\quad |t| \leq s.$

Construcción de un espacio métrico a partir de un espacio pseudométrico

Proposición

Sea (X, d) un espacio pseudométrico.

1. Definimos en X una relación binaria: $a \sim b \iff d(a, b) = 0$.
2. $\sim$ es una relación de equivalencia.
3. Para cada a en X, $[a] := \{b \in X\colon\ b \sim a\}$.
4. $Y := \{[a]\colon\ a \in X\}$.
5. Y es una partición de X.
6. Si $a_1 \sim a_2,\ b_1 \sim b_2,$ entonces $d(a_1, b_1) = d(a_2, b_2)$.
7. Definimos $\rho\colon Y \times Y \to [0, +\infty)$, $\rho([a], [b]) := d(a, b)$.
8. (Y, ρ) es un espacio métrico.

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$,

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$, entonces

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$, entonces $d(a, a) =$

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$, entonces $d(a, a) = 0$,

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$, entonces $d(a, a) = 0$, por eso

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$, entonces $d(a, a) = 0$, por eso $a \sim a$.

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$, entonces $d(a, a) = 0$, por eso $a \sim a$.

Si $a, b \in X$ y $a \sim b$, entonces

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$, entonces $d(a, a) = 0$, por eso $a \sim a$.

Si $a, b \in X$ y $a \sim b$, entonces $d(a, b) = 0$,

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$, entonces $d(a, a) = 0$, por eso $a \sim a$.

Si $a, b \in X$ y $a \sim b$, entonces $d(a, b) = 0$, luego

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$, entonces $d(a, a) = 0$, por eso $a \sim a$.

Si $a, b \in X$ y $a \sim b$, entonces $d(a, b) = 0$, luego $d(b, a) = 0$,

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$, entonces $d(a, a) = 0$, por eso $a \sim a$.

Si $a, b \in X$ y $a \sim b$, entonces $d(a, b) = 0$, luego $d(b, a) = 0$, luego

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$, entonces $d(a, a) = 0$, por eso $a \sim a$.

Si $a, b \in X$ y $a \sim b$, entonces $d(a, b) = 0$, luego $d(b, a) = 0$, luego $b \sim a$.

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$, entonces $d(a, a) = 0$, por eso $a \sim a$.

Si $a, b \in X$ y $a \sim b$, entonces $d(a, b) = 0$, luego $d(b, a) = 0$, luego $b \sim a$.

Si $a, b, c \in X$, $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$, entonces $d(a, a) = 0$, por eso $a \sim a$.

Si $a, b \in X$ y $a \sim b$, entonces $d(a, b) = 0$, luego $d(b, a) = 0$, luego $b \sim a$.

Si $a, b, c \in X$, $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces

$$d(a, c) \leq$$

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$, entonces $d(a, a) = 0$, por eso $a \sim a$.

Si $a, b \in X$ y $a \sim b$, entonces $d(a, b) = 0$, luego $d(b, a) = 0$, luego $b \sim a$.

Si $a, b, c \in X$, $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) =$$

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$, entonces $d(a, a) = 0$, por eso $a \sim a$.

Si $a, b \in X$ y $a \sim b$, entonces $d(a, b) = 0$, luego $d(b, a) = 0$, luego $b \sim a$.

Si $a, b, c \in X$, $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) = 0,$$

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$, entonces $d(a, a) = 0$, por eso $a \sim a$.

Si $a, b \in X$ y $a \sim b$, entonces $d(a, b) = 0$, luego $d(b, a) = 0$, luego $b \sim a$.

Si $a, b, c \in X$, $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) = 0,$$

por eso

Demostración: propiedades de $\sim$

Si $a \in X$, entonces $d(a, a) = 0$, por eso $a \sim a$.

Si $a, b \in X$ y $a \sim b$, entonces $d(a, b) = 0$, luego $d(b, a) = 0$, luego $b \sim a$.

Si $a, b, c \in X$, $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) = 0,$$

por eso $a \sim c$.

Demostración: d no se cambia al pasar a elementos equivalentes

Sean $a_1, a_2, b_1, b_2 \in X$ tales que

$$a_1 \sim a_2, \qquad b_1 \sim b_2.$$

Demostración: d no se cambia al pasar a elementos equivalentes

Sean $a_1, a_2, b_1, b_2 \in X$ tales que

$$a_1 \sim a_2, \qquad b_1 \sim b_2.$$

Entonces, por la desigualdad del cuadrilátero,

Demostración: d no se cambia al pasar a elementos equivalentes

Sean $a_1, a_2, b_1, b_2 \in X$ tales que

$$a_1 \sim a_2, \qquad b_1 \sim b_2.$$

Entonces, por la desigualdad del cuadrilátero,

$$\big|d(a_1, b_1) - d(a_2, b_2)\big|$$

Demostración: d no se cambia al pasar a elementos equivalentes

Sean $a_1, a_2, b_1, b_2 \in X$ tales que

$$a_1 \sim a_2, \qquad b_1 \sim b_2.$$

Entonces, por la desigualdad del cuadrilátero,

$$\left| d(a_1, b_1) - d(a_2, b_2) \right| \leq$$

Demostración: d no se cambia al pasar a elementos equivalentes

Sean $a_1, a_2, b_1, b_2 \in X$ tales que

$$a_1 \sim a_2, \qquad b_1 \sim b_2.$$

Entonces, por la desigualdad del cuadrilátero,

$$\bigl|d(a_1, b_1) - d(a_2, b_2)\bigr| \leq d(a_1, a_2) + d(b_1, b_2)$$

Demostración: d no se cambia al pasar a elementos equivalentes

Sean $a_1, a_2, b_1, b_2 \in X$ tales que

$$a_1 \sim a_2, \qquad b_1 \sim b_2.$$

Entonces, por la desigualdad del cuadrilátero,

$$\left| d(a_1, b_1) - d(a_2, b_2) \right| \leq d(a_1, a_2) + d(b_1, b_2) =$$

Demostración: d no se cambia al pasar a elementos equivalentes

Sean $a_1, a_2, b_1, b_2 \in X$ tales que

$$a_1 \sim a_2, \qquad b_1 \sim b_2.$$

Entonces, por la desigualdad del cuadrilátero,

$$\big| d(a_1, b_1) - d(a_2, b_2) \big| \leq d(a_1, a_2) + d(b_1, b_2) = 0.$$

Demostración: d no se cambia al pasar a elementos equivalentes

Sean $a_1, a_2, b_1, b_2 \in X$ tales que

$$a_1 \sim a_2, \qquad b_1 \sim b_2.$$

Entonces, por la desigualdad del cuadrilátero,

$$\left| d(a_1, b_1) - d(a_2, b_2) \right| \leq d(a_1, a_2) + d(b_1, b_2) = 0.$$

Hemos mostrado que

$$d(a_1, b_1) = d(a_2, b_2).$$

Demostración: definición y propiedades de ρ

Por la parte anterior de la demostración, la definición de ρ es consistente:

$$\rho([a],[b]) \ := \ d(a,b).$$

Demostración: definición y propiedades de ρ

Por la parte anterior de la demostración, la definición de ρ es consistente:

$$\rho([a],[b]) \;:=\; d(a,b).$$

Verifiquemos la desigualdad del triángulo para ρ.

Sean $A, B, C \in Y$.

Demostración: definición y propiedades de ρ

Por la parte anterior de la demostración, la definición de ρ es consistente:

$$\rho([a],[b]) \;:=\; d(a,b).$$

Verifiquemos la desigualdad del triángulo para ρ.

Sean $A, B, C \in Y$. Encontramos $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$.

Demostración: definición y propiedades de ρ

Por la parte anterior de la demostración, la definición de ρ es consistente:

$$\rho([a],[b]) \ := \ d(a,b).$$

Verifiquemos la desigualdad del triángulo para ρ.

Sean $A, B, C \in Y$. Encontramos $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$. Entonces

Demostración: definición y propiedades de ρ

Por la parte anterior de la demostración, la definición de ρ es consistente:

$$\rho([a],[b]) \;:=\; d(a,b).$$

Verifiquemos la desigualdad del triángulo para ρ.

Sean $A, B, C \in Y$. Encontramos $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$. Entonces

$$\rho(A,C)$$

Demostración: definición y propiedades de ρ

Por la parte anterior de la demostración, la definición de ρ es consistente:

$$\rho([a],[b]) \;:=\; d(a,b).$$

Verifiquemos la desigualdad del triángulo para ρ.

Sean $A, B, C \in Y$. Encontramos $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$. Entonces

$$\rho(A,C) =$$

Demostración: definición y propiedades de ρ

Por la parte anterior de la demostración, la definición de ρ es consistente:

$$\rho([a],[b]) \ := \ d(a,b).$$

Verifiquemos la desigualdad del triángulo para ρ.

Sean $A, B, C \in Y$. Encontramos $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$. Entonces

$$\rho(A, C) = d(x, z)$$

Demostración: definición y propiedades de ρ

Por la parte anterior de la demostración, la definición de ρ es consistente:

$$\rho([a],[b]) \;:=\; d(a,b).$$

Verifiquemos la desigualdad del triángulo para ρ.
Sean $A, B, C \in Y$. Encontramos $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$. Entonces

$$\rho(A,C) = d(x,z) \leq$$

Demostración: definición y propiedades de ρ

Por la parte anterior de la demostración, la definición de ρ es consistente:

$$\rho([a],[b]) \;:=\; d(a,b).$$

Verifiquemos la desigualdad del triángulo para ρ.

Sean $A, B, C \in Y$. Encontramos $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$. Entonces

$$\rho(A,C) = d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Demostración: definición y propiedades de ρ

Por la parte anterior de la demostración, la definición de ρ es consistente:

$$\rho([a],[b]) \;:=\; d(a,b).$$

Verifiquemos la desigualdad del triángulo para ρ.

Sean $A, B, C \in Y$. Encontramos $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$. Entonces

$$\rho(A,C) = d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) =$$

Demostración: definición y propiedades de ρ

Por la parte anterior de la demostración, la definición de ρ es consistente:

$$\rho([a], [b]) \;:=\; d(a, b).$$

Verifiquemos la desigualdad del triángulo para ρ.

Sean $A, B, C \in Y$. Encontramos $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$. Entonces

$$\rho(A, C) = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = \rho(A, B) + \rho(B, C).$$

Demostración: definición y propiedades de ρ

Por la parte anterior de la demostración, la definición de ρ es consistente:

$$\rho([a],[b]) \ := \ d(a,b).$$

Verifiquemos la desigualdad del triángulo para ρ.
Sean $A, B, C \in Y$. Encontramos $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$. Entonces

$$\rho(A,C) = d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = \rho(A,B) + \rho(B,C).$$

De manera similar: ρ es simétrica.

Demostración: definición y propiedades de ρ

Por la parte anterior de la demostración, la definición de ρ es consistente:

$$\rho([a],[b]) \;:=\; d(a,b).$$

Verifiquemos la desigualdad del triángulo para ρ.

Sean $A, B, C \in Y$. Encontramos $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$. Entonces

$$\rho(A,C) = d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = \rho(A,B) + \rho(B,C).$$

De manera similar: ρ es simétrica.

De manera similar: $\rho(A,A) = 0$ para cada A en Y.

ρ es una distancia

Sean $A, B \in Y$ tales que $\rho(A, B) = 0$.

ρ es una distancia

Sean $A, B \in Y$ tales que $\rho(A, B) = 0$.

Sean $x \in A$, $y \in B$.

ρ es una distancia

Sean $A, B \in Y$ tales que $\rho(A, B) = 0$.

Sean $x \in A$, $y \in B$.

Entonces

$$d(x, y)$$

ρ es una distancia

Sean $A, B \in Y$ tales que $\rho(A, B) = 0$.

Sean $x \in A$, $y \in B$.

Entonces

$$d(x, y) =$$

ρ es una distancia

Sean $A, B \in Y$ tales que $\rho(A, B) = 0$.

Sean $x \in A$, $y \in B$.

Entonces
$$d(x, y) = \rho(A, B)$$

ρ es una distancia

Sean $A, B \in Y$ tales que $\rho(A, B) = 0$.

Sean $x \in A$, $y \in B$.

Entonces

$$d(x, y) = \rho(A, B) =$$

ρ es una distancia

Sean $A, B \in Y$ tales que $\rho(A, B) = 0$.

Sean $x \in A$, $y \in B$.

Entonces

$$d(x, y) = \rho(A, B) = 0.$$

ρ es una distancia

Sean $A, B \in Y$ tales que $\rho(A, B) = 0$.

Sean $x \in A$, $y \in B$.

Entonces

$$d(x, y) = \rho(A, B) = 0.$$

Por lo tanto,

ρ es una distancia

Sean $A, B \in Y$ tales que $\rho(A, B) = 0$.

Sean $x \in A$, $y \in B$.

Entonces

$$d(x, y) = \rho(A, B) = 0.$$

Por lo tanto, $x \sim y$.

ρ es una distancia

Sean $A, B \in Y$ tales que $\rho(A, B) = 0$.

Sean $x \in A$, $y \in B$.

Entonces

$$d(x, y) = \rho(A, B) = 0.$$

Por lo tanto, $x \sim y$.

Concluimos que $\quad A = [x] = [y] = B.$