Espacios pseudométricos

1 Definición. Sea X un conjunto y sea $d\colon X \times X \to [0, +\infty)$ una función. Se dice que d es una *pseudodistancia* en X, y que (X, d) es un *espacio pseudométrico*, si la función d tiene las siguientes propiedades.

(D1) La desigualdad del triángulo:

$$\forall a, b, c \in X \qquad d(a, b) \le d(a, c) + d(c, b).$$

(D2) La propiedad simétrica:

$$\forall a, b \in X \qquad d(b, a) = d(a, b).$$

(D3) Para cada a en X, $d(a, a) = 0$.

En vez de la palabra "pseudodistancia", algunos autores usan la palabra "pseudométrica".

A diferencia de espacios métricos, aquí no pedimos que el número $d(a, b)$ sea estrictamente positivo para $a \neq b$.

Los espacios pseudométricos comparten muchas propiedades con espacios métricos.

2 Proposición (la desigualdad invertida del triángulo)**.** *Sea (X, d) un espacio pseudométrico. Sean $a, b, c \in X$. Entonces*

$$|d(a, b) - d(a, c)| \le d(b, c). \tag{1}$$

3 Ejercicio. Demostrar la Proposición 2.

4 Proposición (la desigualdad del cuadrilátero)**.** *Sea (X, d) un espacio pseudométrico. Sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in X$. Entonces*

$$|d(a_1, a_2) - d(a_3, a_4)| \le d(a_1, a_3) + d(a_2, a_4). \tag{2}$$

Demostración. De las desigualdades

$$d(a_1, a_2) \leq d(a_1, a_3) + d(a_3, a_4) + d(a_4, a_2)$$

y

$$d(a_3, a_4) \leq d(a_3, a_1) + d(a_1, a_2) + d(a_2, a_4)$$

obtenemos que

$$-(d(a_1, a_3) + d(a_2, a_4)) \leq d(a_1, a_2) - d(a_3, a_4) \leq d(a_1, a_3) + d(a_2, a_4).$$

La última desigualdad doble es equivalente a (2). □

5 Proposición (construcción de un espacio métrico a partir de un espacio pseudométrico)**.** *Sea (X, d) un espacio pseudométrico.*

1. *Definimos una relación binaria en X mediante la siguiente regla:*

   $$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad d(x, y) = 0.$$

   Entonces esta relación binaria es una relación de equivalencia.

2. *Para cada x en X denotemos su clase de equivalencia por $[x]$. Denotemos por Y al conjunto de las clases de equivalencia:*

   $$Y := \big\{[x] \colon \ x \in X\big\} = \big\{A \subseteq X \colon \quad \exists x \in X \quad A = [x]\big\}.$$

3. *Si $x_1 \sim x_2$, $y_1 \sim y_2$, entonces $d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2)$.*

4. *Definimos $\rho \colon Y \times Y \to [0, +\infty)$ mediante la regla*

   $$\rho([x], [y]) := d(x, y).$$

   El inciso 3 justifica que esta definición es consistente.

5. *ρ es una métrica.*

Demostración. 1. Si $x \in X$, entonces $d(x, x) = 0$ y $x \sim x$. Si $x, y \in X$ tales que $x \sim y$, entonces $d(y, x) = d(x, y) = 0$, luego $y \sim x$. Si $x, y, z \in X$ tales que $x \sim y$, $y \sim z$, entonces

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = 0,$$

luego $x \sim z$.

3. Sean $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ tales que $x_1 \sim x_2$, $y_1 \sim y_2$. Entonces por la Proposición 4

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) = 0,$$

así que $d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2)$.

4. El inciso 2 garantiza que la definición de ρ es consistente.

5. Verifiquemos que ρ es una distancia. Probemos que ρ satisface la desigualdad del triángulo. Sean $A, B, C \in Y$. Encontramos $x, y, z \in X$ tales que $A = [x]$, $B = [y]$, $C = [z]$. Entonces

$$\rho(A, C) = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = \rho(A, B) + \rho(B, C).$$

De manera similar se muestra que la función ρ es simétrica y que $\rho(A, A) = 0$ para cada A en Y. Sean $A, B \in Y$ tales que $\rho(A, B) = 0$. Encontramos $x, y \in X$ tales que $A = [x]$, $B = [y]$. Entonces $d(x, y) = 0$, luego $A = [x] = [y] = B$. $\square$