Pseudométrica inducida por una medida exterior

Tarea adicional

Objetivos. Dada una medida exterior $\varphi\colon 2^X \to [0, +\infty]$, mostrar que la función

$$d(A, B) \coloneqq \varphi(A \mathbin{\triangle} B) \qquad (A, B \in 2^X)$$

es una pseudométrica en 2^X y que las operaciones $\cup$, $\cap$, $\setminus$ y $\triangle$ son Lipschitz continuas respecto a esta pseudométrica.

Requisitos. Medida exterior, distancia.

Algunas propiedades de la diferencia simétrica (repaso)

Los títulos de las siguientes propiedades no son estándares, los doy por analogía con propiedades de números y funciones con valores numéricos.

1. Proposición (desigualdad del triángulo para la diferencia simétrica). Sean A, B, C algunos conjuntos. Entonces

$$A \mathbin{\triangle} B \subset (A \mathbin{\triangle} C) \cup (C \mathbin{\triangle} B).$$

2. Proposición (invariancia de la diferencia simétrica bajo complementos). Sean A y B algunos subconjuntos de un conjunto X. Entonces

$$(X \setminus A) \mathbin{\triangle} (X \setminus B) = A \mathbin{\triangle} B.$$

3. Proposición (desigualdad de Lipschitz para la unión, intersección y diferencia de conjuntos). Sean A, B, C, D algunos conjuntos. Entonces

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \mathbin{\triangle} (C \cap D) &\subset (A \mathbin{\triangle} C) \cup (B \mathbin{\triangle} D);\\
(A \cup B) \mathbin{\triangle} (C \cup D) &\subset (A \mathbin{\triangle} C) \cup (B \mathbin{\triangle} D);\\
(A \setminus B) \mathbin{\triangle} (C \setminus D) &\subset (A \mathbin{\triangle} C) \cup (B \mathbin{\triangle} D);
\end{aligned}$$

Pseudométrica entre conjuntos inducida por una medida exterior

4. Definición (pseudométrica entre conjuntos inducida por una medida exterior). Sean X un conjunto y $\varphi\colon 2^X \to [0,+\infty]$ una medida exterior. Definimos la función $d\colon 2^X \times 2^X \to [0,+\infty]$ mediante la regla

$$d(A,B) \coloneqq \varphi(A \mathbin{\triangle} B).$$

Entonces d cumple con los axiomas de pseudométrica, es decir, d toma valores en $[0,+\infty]$, es simétrica y satisface la desigualdad triangular. La última se obtiene usando la Proposición 1 y la subaditividad de φ.

5. Proposición (continuidad de la unión, intersección y diferencia de conjuntos). Sean X, φ, d como en la Definición 4. Demostrar que las operaciones $\cup$, $\cap$ y $\setminus$ son Lipschitz continuas en el siguiente sentido:

$$\begin{aligned} d(A \cap B, C \cap D) &\le d(A,C) + d(B,D), \\ d(A \cup B, C \cup D) &\le d(A,C) + d(B,D), \\ d(A \setminus B, C \setminus D) &\le d(A,C) + d(B,D). \end{aligned}$$