Propiedades de bolas en espacios normados

Objetivos. Estudiar propiedades elementales de bolas en espacios normados:

- demostrar que cada bola es convexa;
- enunciar una fórmula para el diámetro de la bola;
- encontrar una condición necesaria y suficiente para que dos bolas sean disjuntas;
- encontrar una condición necesaria y suficiente para que una bola esté contenida en otra.

Prerrequisitos. Norma, bolas en espacios métricos, combinaciones convexas, conjuntos convexos.

Dados a en V y $r > 0$, denotamos por $B(a, r)$ la bola con centro en a de radio r:

$$B(a, r) = \{v \in V : \ d(a, v) < r\} = \{v \in V : \ \|v - a\| < r\}.$$

Ya sabemos (por la teoría elemental de espacios métricos) que $B(a, r)$ es un conjunto abierto.

En general, cuando trabajamos en un espacio métrico, podemos afirmar que $a \in B(a, r)$. En espacios normados tenemos una receta más interesante para construir puntos de $B(a, r)$.

1 Proposición. *Sean $a \in V$, $r > 0$, $u \in V \setminus \{0_V\}$, $\lambda > 0$. Entonces*

$$a + \lambda u \in B(a, r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda < \frac{r}{\|a\|}.$$

Demostración. En efecto, la desigualdad $\|(a+\lambda u) - a\| < r$ es equivalente a la desigualdad $\lambda < \frac{r}{\|a\|}$. □

2 Proposición. *Sea V un espacio vectorial complejo normado, $V \neq \{0_V\}$. Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces*

$$\operatorname{diam}(B(a, r)) = 2r.$$

Idea de demostración. Usar la Proposición 1. $\square$

3 Proposición. *Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces la bola $B(a,r)$ es convexa.*

Demostración. Sean $v, w \in B(a,r)$, $\lambda \in [0,1]$. Entonces

$$\begin{aligned}\|(1-\lambda)v + \lambda w - a\| &= \|(1-\lambda)(v-a) + \lambda(w-a)\| \\ &\le (1-\lambda)\|v-a\| + \lambda\|w-a\| < (1-\lambda)r + \lambda r = r,\end{aligned}$$

así que $(1-\lambda)v + \lambda w \in B(a,r)$. $\square$

4 Proposición. *Sea V un espacio vectorial complejo normado, $V \ne \{0_V\}$. Sean $a_1, a_2 \in V$ y $r_1, r_2 > 0$ tales que*

$$\|a_1 - a_2\| < r_1 + r_2.$$

Entonces

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \ne \varnothing.$$

Demostración. Pongamos

$$v := \frac{r_2}{r_1 + r_2} a_1 + \frac{r_1}{r_1 + r_2} a_2.$$

Entonces

$$\|v - a_1\| = \left\| \frac{r_1}{r_1 + r_2}(a_2 - a_1) \right\| = \frac{r_1\|a_2 - a_1\|}{r_1 + r_2} < r_1,$$

y de manera similar $\|v - a_2\| < r_2$. $\square$

5 Proposición. *Sea V un espacio vectorial complejo normado, $V \ne \{0_V\}$. Sean $a \in V$, $0 < r_1 < r_2$. Entonces $B(a, r_2) \setminus B(a, r_1) \ne \varnothing$.*

Idea de demostración. Sea $u \in V$, $u \ne \{0_V\}$. Considerar w de la forma

$$w = a + \lambda u,$$

con $\lambda > 0$. Encontrar λ tal que $w \in B(a, r_2)$, pero $w \notin B(a, r_1)$. $\square$

6 Proposición. *Sea V un espacio vectorial complejo normado, $V \ne \{0_V\}$. Sean $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$ tales que*

$$\|a_1 - a_2\| + r_2 > r_1.$$

Entonces $B(a_2, r_2) \setminus B(a_1, r_1) \ne \varnothing$.

Idea de demostración. Buscar w en forma

$$w = a_2 + \lambda(a_2 - a_1),$$

donde $\lambda > 0$. Encontrar un λ tal que $w \in B(a_2, r_2)$, pero $w \notin B(a_1, r_1)$. $\square$