# Proyecciones en espacios de Hilbert

Estos apuntes están basados en el libro de Conway “A course in functional analysis”.

**Objetivos.** Estudiar propiedades de proyecciones (ortogonales) que actúan en un espacio de Hilbert.

**Prerrequisitos.** Operadores idempotentes en espacios normados, proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert.

En este tema suponemos que $H$ es un espacio vectorial complejo.

**1 Observación** (operadores idempotentes en espacios normados)**.** Sea $V$ un espacio normado y sea $A \in \mathcal{B}(V)$. Se dice que $A$ es *idempotente* si $A^2 = A$. Si $A$ es idempotente, entonces $I - A$ también es idempotente. Es fácil demostrar que si $A$ es idempotente, entonces

$$\operatorname{im}(A) = \ker(I - A), \qquad \operatorname{im}(I - A) = \ker(A),$$

todos estos subespacios de $V$ son cerrados, y el espacio $V$ es una suma directa de $\ker(A)$ e $\operatorname{im}(A)$.

**2 Observación** (proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado, repaso)**.** Sea $M$ un subespacio cerrado de $H$. Ya sabemos que existe un único operador $P_M \colon H \to H$ tal que para cada $x$ en $H$

$$P_M x \in M, \qquad x - P_M x \in M^\perp.$$

Más aún, $\ker(P_M) = \operatorname{im}(P_M)^\perp$.

**3 Teorema** (criterio de proyección en un espacio de Hilbert)**.** *Si $E \in \mathcal{B}(H)$ tal que $E^2 = E$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

*(a)* $\ker(E) = \operatorname{im}(E)^\perp$*;*

*(b)* $E = P_{\operatorname{im}(E)}$*;*

*(c)* $\langle Eh, h\rangle \geq 0$ *para cada $h$ en $H$;*

*(d)* $E$ *es hermitiano;*

*(e) $E$ es normal.*

*Demostración.* (a)⇒(b). Suponemos que $\ker(E) = \operatorname{im}(E)^\perp$. Sea $M := \operatorname{im}(E)$. Dado $h$ en $H$, tenemos que $Eh \in M$ y $h - Eh = (I - E)h \in \operatorname{im}(I - E) = \ker(E) = M^\perp$. Por lo tanto, $E = P_M$.

(b)⇒(a). Suponemos que $E = P_{\operatorname{im}(E)}$. Pongamos $M := \operatorname{im}(E)$. Ya sabemos que $\operatorname{im}(P_M) = M$ y $\ker(P_M) = M^\perp$.

(a)⇒(c). Suponemos que $\ker(E) = \operatorname{im}(E)^\perp$. Dado $h$ en $H$, tenemos

$$h = Eh + (I - E)h,$$

donde $Eh \in \operatorname{im}(E)$ y $(I - E)h \in \operatorname{im}(I - E) = \ker(E) = \operatorname{im}(E)^\perp$, por eso $Eh \perp (I - E)h$. Luego

$$\langle Eh, h\rangle = \langle Eh, Eh + (I - E)h\rangle = \langle Eh, Eh\rangle + \langle Eh, (I - E)h\rangle = \|Eh\|^2 \geq 0.$$

(c)⇒(d). Suponemos que $q_E(h) \geq 0$ para cada $h$ en $H$. En particular, esto implica que $q_E(h) \in \mathbb{R}$ para cada $h$ en $H$. Luego $E$ es hermitiano.

(d)⇒(e). Suponemos que $E^* = E$. Luego $E$ conmuta con $E^*$.

(e)⇒(a). Suponemos que $E$ es normal. Esto implica que $\|E^*h\| = \|Eh\|$ para cada $h$ en $H$. En particular,

$$\ker(E) = \ker(E^*) = \operatorname{im}(E)^\perp. \qquad \square$$

**4 Teorema** (criterio de proyección en términos de la norma)**.** *Si $E \in \mathcal{B}(H)$ tal que $E^2 = E$ y $E \neq 0$, entonces*

$$\ker(E) = \operatorname{im}(E)^\perp \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|E\| = 1.$$

*Demostración.* ⇒. Suponemos que $\ker(E) = \operatorname{im}(E)^\perp$. Para cada $h$ en $H$, como $Eh \perp (I - E)h$, por el teorema de Pitagoras tenemos que

$$\|h\|^2 = \|Eh + (I - E)h\|^2 = \|Eh\|^2 + \|(I - E)h\|^2 \geq \|Eh\|^2.$$

Luego $\|E\| \leq 1$. Por otro lado, para cada $h$ en $\operatorname{im}(E)$, tenemos que $Eh = h$ y $\|Eh\| = \|h\|$. Por lo tanto, $\|E\| = 1$.

⇐. Suponemos que $\|E\| = 1$. Dado $h$ en $\ker(E)^\perp$, tenemos lo siguiente.

$$h - Eh = (I - E)h \in \operatorname{im}(I - E) = \ker(E),$$

así que
$$0 = \langle h - Eh, h \rangle = \|h\|^2 - \langle Eh, h \rangle.$$
Luego
$$\|h\|^2 = \langle Eh, h \rangle = |\langle Eh, h \rangle| \leq \|Eh\| \, \|h\| \leq \|h\|^2.$$
Concluimos que para cada $h$ en $\ker(E)^\perp$,
$$\|Eh\|^2 = \|h\|^2 = \langle Eh, h \rangle.$$
Luego
$$\|(E - I)h\|^2 = \|Eh\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle Eh, h \rangle) + \|h\|^2 = 0,$$
así que $h \in \ker(I - E) = \mathrm{im}(E)$. Hemos demostrado que
$$\ker(E)^\perp \subseteq \mathrm{im}(E).$$
Por otro lado, dado $h \in \mathrm{im}(E)$, usamos la descomposición ortogonal: $h = h_1 + h_2$, donde $h_1 \in \ker(E)$ y $g_2 \in \ker(E)^\perp$. En particular, sabemos que $g_2 \in \mathrm{im}(E)$ y $Eg_2 = g_2$. Aplicamos $E$ al vector $h$:
$$h = Eh = Eh_1 + Eh_2 = Eh_2 = h_2.$$
Concluimos que
$$\mathrm{im}(E) \subseteq \ker(E)^\perp.$$
Juntando estas dos contenciones, obtenemos que $\mathrm{im}(E) = \ker(E)^\perp$. □