# El producto de dos espacios topológicos

**Objetivos.** Definir el producto de dos espacios topológicos. Estudiar el concepto de continuidad de funciones de dos argumentos.

**Prerrequisitos.** Topologías, topobases (bases de topologías), la topología generada por una topobase, funciones continuas.

En este tema suponemos que $(X, \tau_X)$, $(Y, \tau_Y)$ son espacios topológicos.

**1 Proposición.** *Pongamos* $\mathcal{P} \coloneqq \{A \times B\colon\ A \in \tau_X,\ B \in \tau_Y\}$. *Entonces* $\mathcal{P}$ *es una topobase en* $X \times Y$.

*Demostración.* 1. La propiedad $\cup\mathcal{P} = X \times Y$ se sigue del hecho que $X \times Y \in \mathcal{P}$.

2. Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ y sea $(x, y) \in P_1 \cap P_2$. Tenemos que demostrar que existe $P_3 \in \mathcal{P}$ tal que $(x, y) \in P_3$ y $P_3 \subseteq P_1 \cap P_2$. En efecto, $P_1 = A_1 \times B_1$, $P_2 = A_2 \times B_2$, donde $A_1, A_2 \in \tau_X$, $B_1, B_2 \in \tau_Y$. Luego $P_1 \cap P_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathcal{P}$. Pongamos $P_3 = P_1 \cap P_2$ y obtenemos que $(x, y) \in P_3 \subseteq P_1 \cap P_2$. $\square$

**2 Definición.** Denotemos por $\tau_{X\times Y}$ a la topología generada por la topobase $\mathcal{P}$:

$$\tau_{X\times Y} \coloneqq \left\{C \subseteq X \times Y\colon \quad \exists \gamma \subseteq \mathcal{P} \quad C = \cup\gamma\right\}.$$

Si no se dice otra cosa, entonces $X \times Y$ siempre se considera con esta topología.

**3 Observación.** De la definición de $\tau_{X\times Y}$ sale la siguiente descripción de los elementos de $\tau_{X\times Y}$. Un conjunto $V \subseteq X \times Y$ pertenece a $\tau_{X\times Y}$ si, y solo si, para cada $(x, y)$ en $V$ existen $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ tales que $x \in A$, $y \in B$, $A \times B \subseteq V$.

Definimos $\pi_1\colon X \times Y \to X$, $\pi_2\colon X \times Y \to Y$ mediante las reglas

$$\pi_1(x, y) \coloneqq x, \qquad \pi_2(x, y) \coloneqq y.$$

**4 Proposición.** *Las funciones* $\pi_1$ *y* $\pi_2$ *son continuas.*

*Demostración.* Mostremos que la función $\pi_1$ es continua. Sea $A \in \tau_X$. Entonces $\pi_1^{-1}[A] = A \times Y \in \mathcal{P} \subseteq \tau_{X\times Y}$. $\square$

**5 Proposición.** *Las funciones $\pi_1$ y $\pi_2$ son abiertas.*

*Demostración.* 1. Mostremos que si $V \in \mathcal{P}$, entonces $\pi_1[V] \in \tau_X$. Sea $V \in \mathcal{P}$. Si $V = \varnothing$, entonces $\pi_1[V] = \varnothing \in \tau_X$. Si $V \neq \varnothing$, entonces existen $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ tales que $V = A \times B$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. Luego es fácil ver que $\pi_1[V] = A$.

2. Mostremos que si $W \in \tau_{X\times Y}$, entonces $\pi_1[W] \in \tau_X$. Como la topología $\tau_{X\times Y}$ está generada por $\mathcal{P}$, existe una familia $(V_j)_{j\in J}$ tal que $W = \cup_{j\in J} V_j$. Luego

$$\pi_1[W] = \bigcup_{j\in J} \pi_1[V_j] \in \tau_X.$$ $\square$

**6 Ejemplo.** Mostremos que las funciones $\pi_1$, $\pi_2$ no siempre son cerradas. Consideremos el espacio $X = Y = \mathbb{R}$ con la topología usual y el conjunto

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \colon\ x > 0,\ y > 0,\ xy = 1\}.$$

Entonces el conjunto $H$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$, pero sus imágenes respecto a $\pi_1$ y $\pi_2$ no son cerradas: $\pi_1[H] = \pi_2[H] = (0, +\infty)$.

**7 Proposición.** *$\tau_{X\times Y}$ es la más débil entre las topologías con respecto a las cuales las funciones $\pi_1$ y $\pi_2$ son continuas.*

*Demostración.* Sea $\omega$ una topología en $X \times Y$ tal que las funciones $\pi_1 \colon (X \times Y, \omega) \to (X, \tau_X)$ y $\pi_2 \colon (X \times Y, \omega) \to (Y, \tau_Y)$ son continuas. Entonces para cualesquiera $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ obtenemos

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) = \pi_1^{-1}[A] \cap \pi_2^{-1}[B] \in \omega.$$

Hemos mostrado que $\mathcal{P} \subseteq \omega$. Como la colección $\omega$ es cerrada bajo uniones, obtenemos que $\tau_{X\times Y} \subseteq \omega$. $\square$

**8 Proposición.** *Sean $(Z, \tau_Z)$ un espacio topológico, $f \colon X \times Y \to Z$, $(a,b) \in X \times Y$. Entonces $f$ es continua en $(a,b)$ si, y solo si, para cada $C$ en $\tau_Z$ con $f(a,b) \in C$ existen $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ tales que $a \in A$, $b \in B$, $f[A \times B] \subseteq C$.*

*Demostración.* Sale de la Observación 3. $\square$

**9 Ejercicio.** Sea $(Z, \tau_Z)$ un espacio topológico y sea $f \colon Z \to X \times Y$. Demostrar que $f$ es continua si, y solo si, las funciones $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ son continuas.