El producto de dos espacios normados

1 Proposición (el producto de dos espacios vectoriales)**.** *Sean V y W espacios vectoriales complejos. En el conjunto $V \times W$ definimos las operaciones lineales por componentes:*

$$(a, b) + (v, w) \coloneqq (a + v, b + w), \qquad \lambda(a, b) \coloneqq (\lambda a, \lambda b).$$

Entonces $V \times W$ es un espacio vectorial complejo.

2 Proposición (el producto de dos espacios normados)**.** *Sean V y W espacios normados complejos y sea $p \in [1, +\infty]$. Definimos $\| \cdot \|_{V \times W, p} \colon V \times W \to [0, +\infty)$ mediante la regla*

$$\|(a, b)\|_{V \times W, p} \coloneqq \|(\|a\|, \|b\|)\|_p,$$

esto es, para $p \in [1, +\infty)$

$$\|(a, b)\|_{V \times W, p} \coloneqq (\|a\|^p + \|b\|^p)^{1/p},$$

y para $p = +\infty$

$$\|(a, b)\|_{V \times W, +\infty} \coloneqq \max\{\|a\|, \|b\|\}.$$

Entonces $\| \cdot \|_{V \times W, p}$ es una norma en el espacio vectorial $V \times W$.

3 Proposición (el producto de dos espacios de Banach)**.** *Sean V y W espacios de Banach complejos y sea $p \in [1, +\infty]$. Entonces el espacio $V \times W$ con la norma $\| \cdot \|_{V \times W, p}$ es de Banach.*

4 Ejercicio. Sean V y W espacios de Banach complejos y sean $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$. Demostrar que las normas $\| \cdot \|_{V \times W, p_1}$ y $\| \cdot \|_{V \times W, p_2}$ son equivalentes.