Producto de medidas

En este tema, igual que antes, estamos suponiendo que $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ son espacios de medida. Denotamos por $\mathcal{R}$ el conjunto de los "rectángulos medibles":

$$\mathcal{R} \coloneqq \{A \times B \colon\ A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}\}.$$

Denotamos por $\mathcal{E}$ el anillo generado por $\mathcal{R}$. Sus elementos (que se llaman "conjuntos elementales") se pueden escribir como uniones finitas disjuntas de los elementos de $\mathcal{R}$. Finalmente, denotamos por $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ a la σ-álgebra generada por $\mathcal{R}$. Como ya sabemos, $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ es la clase monótona generada por $\mathcal{E}$.

El objetivo de esta sección es definir en la σ-álgebra $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ una medida $\mu \times \nu$ tal que

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B). \tag{1}$$

1 Observación. Un camino que parece natural es primero definir $\mu \times \nu$ en $\mathcal{R}$ mediante la fórmula (1), demostrar que $\mu \times \nu$ es una premedida, extenderla a $\mathcal{E}$ (hay una proposición simple sobre la extensión de una premedida de un semianillo a un anillo) y luego extenderla a $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ mediante el teorema de Carathéodory. Sin embargo, si definimos $\mu \times \nu$ en $\mathcal{R}$ por medio de (1), es difícil demostrar que $\mu \times \nu$ es una premedida. Cuando $A \times B$ es la unión de una sucesión disjunta $(C_k \times D_k)_{k \in \mathbb{N}}$, la estructura de esta sucesión puede ser muy complicada. Los conjuntos C_k no necesariamente son disjuntos entre si. Por eso elegimos otro camino: integrar las medidas de las secciones.

2 Lema. *Para cada Q en $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, definamos*

$$\begin{aligned} &\varphi_Q \colon X \to [0, +\infty], && \varphi_Q(x) \coloneqq \nu(Q_x); \\ &\psi_Q \colon Y \to [0, +\infty], && \psi_Q(y) \coloneqq \mu(Q^y). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\varphi_Q(x) = \int_Y (\mathbb{1}_Q)_x \, \mathrm{d}\nu, \qquad \psi_Q(y) = \int_X (\mathbb{1}_Q)^y \, \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

En otras palabras,

$$\varphi_Q(x) = \int_Y \mathbb{1}_Q(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y), \qquad \psi_Q(y) = \int_X \mathbb{1}_Q(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x). \tag{3}$$

3 Teorema. *Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida σ-finita. Entonces, para cada Q en $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, se tiene que $\varphi_Q \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $\psi_Q \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, [0, +\infty])$, y*

$$\int_X \varphi_Q \, \mathrm{d}\mu = \int_Y \psi_Q \, \mathrm{d}\nu, \tag{4}$$

donde φ_Q y ψ_Q están definidas como en el lema.

Esquema de demostración. Denotemos por Ω a la colección de todos los conjuntos Q en $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ para los cuales $\varphi_Q \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $\psi_Q \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, [0, +\infty])$, y se cumple la fórmula (4).

1. Mostremos que $\mathcal{R} \subseteq \Omega$. Sean $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$. entonces $A \times B \in \Omega$. En efecto,

$$\varphi_{A\times B} = \nu(B)\mathbb{1}_A, \qquad \psi_{A\times B} = \mu(A)\mathbb{1}_B,$$

y

$$\int_X \varphi_{A\times B}\,\mathrm{d}\mu = \mu(A)\nu(B) = \int_Y \psi_{A\times B}\,\mathrm{d}\nu.$$

2. Mostremos que la colección Ω es cerrada bajo uniones finitas disjuntas. En efecto, sean $P_1, \ldots, P_m \in \Omega$ conjuntos disjuntos a pares, y sea $Q \coloneqq \bigcup_{k=1}^m P_k$. Entonces, $Q_x = \bigcup_{k=1}^m (P_k)_x$, y los conjuntos $(P_k)_x$ son disjuntos a pares. La situación con $(P_k)^y$ y Q^y es similar. Luego,

$$\varphi_Q(x) = \sum_{k=1}^m \varphi_{P_k}(x), \qquad \psi_Q(y) = \sum_{k=1}^m \psi_{P_k}(y).$$

Concluimos que $\varphi_Q \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y $\psi_Q \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, [0, +\infty])$, por ser sumas de funciones medibles. Aplicamos la propiedad aditiva de la integral y la suposición que $P_k \in \Omega$:

$$\int_X \varphi_Q\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^m \int_X \varphi_{P_k}\,\mathrm{d}\mu \overset{P_k\in\Omega}{=\!=} \sum_{k=1}^m \int_X \psi_{P_k}\,\mathrm{d}\nu = \int_Y \psi_Q\,\mathrm{d}\nu.$$

3. Sea $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en Ω y sea $Q = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k$. Mostremos que $Q \in \Omega$. Primero, notamos que para cada x en X,

$$Q_x = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (P_k)_x,$$

y la sucesión de conjuntos $((P_k)_x)_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente. Luego, por el teorema sobre la medida de una sucesión creciente de conjuntos,

$$\varphi_Q(x) = \nu(Q_x) = \lim_{k\to\infty} \nu((P_k)_x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_{P_k}(x).$$

Luego, $\varphi_Q \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Además, la sucesión $(\varphi_{P_k})_{k=1}^\infty$ es creciente. Por el teorema de la convergencia monótona,

$$\int_X \varphi_Q\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_{P_k}\,\mathrm{d}\mu.$$

De manera similar, $\psi_Q \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, [0, +\infty])$ y

$$\int_Y \psi_Q \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_Y \psi_{Q_k} \, \mathrm{d}\nu.$$

Además, por la suposición, $\int_X \varphi_{P_k} \, \mathrm{d}\mu = \int_Y \psi_{P_k} \, \mathrm{d}\nu$ para cada k. Concluimos que $Q \in \Omega$.

4. Sea $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión disjunta en Ω. Entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \in \Omega$. En efecto, para las uniones finitas usamos el inciso 2, luego pasamos a la unión numerable usando el inciso 3.

5. Supongamos que $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$, $\mu(A) < +\infty$, $\nu(B) < +\infty$, $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente tal que $P_k \subseteq A \times B$ para cada k, y $Q = \bigcap_{k\in\mathbb{N}}^{\infty} P_k$. Mostremos que $Q \in \Omega$. En efecto, aplicamos a las sucesiones de funciones φ_{P_n} y ψ_{P_n} el teorema de convergencia dominada.

6. Aplicamos la suposición que μ y ν son σ-finitas. Encontramos una sucesión disjunta $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\mu(A_n) < +\infty$ para cada n en $\mathbb{N}$. Encontramos una sucesión disjunta $(B_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{G}^{\mathbb{N}}$ tal que $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ y $\nu(B_n) < +\infty$ para cada n en $\mathbb{N}$. Para cada $Q \subseteq X \times Y$ y cada m, n en $\mathbb{N}$, pongamos

$$Q_{m,n} \coloneqq Q \cap (A_m \times B_n).$$

Denotemos por $\mathcal{M}$ la clase de todos los conjuntos Q en $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tales que $Q_{m,n} \in \Omega$ para cada m, n en $\mathbb{N}$. Los incisos 1 y 2 muestran que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}$, y los incisos 3 y 5 muestran que $\mathcal{M}$ es una clase monótona. Luego $\mathcal{M} = \mathcal{F} \times \mathcal{G}$.

7. Sea $Q \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Entonces, por el inciso 6, $Q_{m,n} \in \Omega$ para cada m, n. Luego, por el inciso 4, concluimos que $Q \in \Omega$. □

4 Definición (producto de medidas)**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, donde μ y ν son medidas σ-finitas. Para cada Q en $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, pongamos

$$(\mu \times \nu)(Q) \coloneqq \int_X \varphi_Q \, \mathrm{d}\mu. \tag{5}$$

Por el teorema, podemos escribir también

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int_Y \psi_Q \, \mathrm{d}\nu.$$

5 Proposición. *Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, donde μ y ν son medidas σ-finitas. Entonces, $\mu \times \nu$ es una medida.*

Demostración. 1. Es fácil ver que $\varphi_\varnothing$ es la constante 0, por eso $(\mu \times \nu)(\varnothing) = 0$.

2. Sea $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión disjunta de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, y sea $Q := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k$. Para cada x en X, tenemos que $((P_k)_x)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{G}$, y la unión de esta sucesión es Q_x. Por la propiedad σ-aditiva de ν,

$$\varphi_Q(x) = \nu(Q_x) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu((P_k)_x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{P_k}(x).$$

Aplicamos el teorema sobre la integral de la serie de funciones positivas medibles:

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int_X \varphi_Q \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \varphi_{P_k} \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(P_k). \qquad \square$$

6 Ejemplo. $X = Y = [0,1]$, μ es la medida de Lebesgue y ν es la medida de conteo. Aquí la medida ν no es σ-finita. Denotemos por D a la diagonal del cuadrado $[0,1]^2$:

$$D := \big\{(x,x)\colon\ x \in [0,1]\big\}.$$

Notamos que D el la intersección de los conjuntos elementales

$$\bigcup_{j=1}^{n} \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]^2,$$

por eso D pertenece a la σ-álgebra $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$.

Para cada x en X, tenemos que

$$D_x = \{y \in [0,1]\colon\ (x,y) \in D\} = \{y \in [0,1]\colon\ y = x\} = \{x\},$$

$$\varphi_D(x) = \nu(D_x) = 1.$$

Luego

$$\int_X \varphi_D \,\mathrm{d}\mu = 1.$$

Por otro lado, para cada y en Y, tenemos que

$$D^y = \{x \in [0,1]\colon\ (x,y) \in D\} = \{x \in [0,1]\colon\ x = y\} = \{y\},$$

$$\psi_D(y) = \mu(D^y) = 0.$$

Luego

$$\int_Y \psi_D \,\mathrm{d}\nu = 0.$$

Este ejemplo muestra que en el Teorema 3 no se puede omitir la condición que μ y ν son σ-finitas.