Matrices normales

problemas para examen

Índice

1. La matriz transpuesta conjugada

1 Ejercicio (sobre la imagen de una matriz y el núcleo de la matriz adjunta)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Demuestre que

$$\operatorname{im}(A) = \ker(A^*)^\perp.$$

2. Proyecciones ortogonales

2 Ejercicio. Sea $a \in \mathbb{C}^n$, $a \neq \{0_n\}$, $n \geq 2$. Denotemos por P_a al operador de la proyección ortogonal sobre a. Encuentre la imagen de P_a, el núcleo de P_a y el espectro de P_a.

3 Ejercicio. Dado un subespacio S de $\mathbb{C}^n$, denotemos por P_S al operador de la proyección ortogonal sobre S. Encuentre la imagen y el núcleo de P_S.

4 Ejercicio. Sea S un subespacio de $\mathbb{C}^n$. Demuestre que

$$P_{S^\perp} = I_n - P_S.$$

5 Ejercicio. Sean S_1 y S_2 subespacios de $\mathbb{C}^n$. Demuestre que

$$P_{S_1 \cap S_2} = P_{S_1} P_{S_2}.$$

6 Ejercicio. Sean S_1 y S_2 subespacios de $\mathbb{C}^n$. Exprese $P_{S_1+S_2}$ en términos de P_{S_1} y P_{S_2}.

3. Matrices circulantes

7 Ejercicio. Sea F_n la matriz de la transformada finita de Fourier. Demuestre que

$$\frac{1}{n} F_n^* F_n = I_n.$$

8 Ejercicio. Demuestre el teorema de convolución para la convolución discreta cíclica (la convolución del grupo $\mathbb{Z}_n$).

9 Ejercicio (teorema de la descomposición espectral para matrices circulantes)**.** Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Denotemos por $\operatorname{circ}(a)$ la matriz circulante generada por a:

$$\operatorname{circ}(a) := \left[a_{(j-k) \mod n} \right]_{j,k=0}^{n-1}.$$

Demuestre que

$$F_n \operatorname{circ}(a) = \operatorname{diag}(F_n a) F_n.$$

Calcule el espectro de $\operatorname{circ}(a)$.

10 Ejercicio. Calcule el espectro de las siguientes matrices circulantes o de sus generalizaciones $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

11 Ejercicio. Demuestre que las siguientes 4 álgebras son isomorfas:

- $\mathbb{C}^n$ con la multiplicación por componentes,
- $\mathbb{C}^n$ con la convolución discreta cíclica,
- $\mathcal{D}_n$, es decir, el subálgebra de $\mathcal{M}_n$ de las matrices diagonales,
- $\mathcal{C}_n$, es decir, el subálgebra de $\mathcal{M}_n$ de las matrices circulantes.