Espacios métricos,
conceptos topológicos elementales

Problemas para examen

Índice

1. Espacios métricos: definición y ejemplos

1 Ejercicio. Escriba la definición de métrica (distancia) y la definición del espacio métrico.

2 Ejercicio (la métrica inducida por una norma)**.** Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo. Recuerde las propiedades de la norma y demuestre que la función

$$d(a,b) \coloneqq \|a-b\|$$

es una métrica.

3 Ejercicio. Escriba la definición de la métrica en una gráfica no dirigida.

4 Ejercicio (la métrica común en $\mathbb{R}$)**.** Muestre que la siguiente función es una distancia en $\mathbb{R}$:

$$d(x,y) \coloneqq |x-y|.$$

5 Ejercicio. Muestre que la siguiente función es una métrica en $\mathbb{R}^n$:

$$d_1(x,y) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j| \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

6 Ejercicio. Muestre que la siguiente función es una métrica en $\mathbb{R}^n$:

$$d_\infty(x,y) \coloneqq \max_{1\le j\le n} |x_j - y_j|.$$

7 Ejercicio (distancia de "vuelos a través de la capital")**.** Definimos $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty)$ mediante la regla

$$\rho(a,b) \coloneqq \begin{cases} 0, & a = b; \\ |a| + |b|, & a \ne b. \end{cases}$$

Demuestre que ρ es una distancia.

8 Ejercicio (una distancia especial en los reales positivos con el más infinito)**.** Pongamos $X \coloneqq [0,+\infty) \cup \{+\infty\} = [0,+\infty]$. Definimos $f\colon X \to [0,1]$,

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{x}{x+1}, & x \in [0,+\infty), \\ 1, & x = +\infty. \end{cases}$$

Definimos $\rho\colon X^2 \to [0,+\infty)$ mediante la siguiente regla: $\rho(x,y) \coloneqq |f(x) - f(y)|$.

A. Demuestre que f es inyectiva. Se recomienda mostrar que f es estrictamente creciente en $[0,+\infty)$ y que $f(x) < f(+\infty)$ para cada x en $[0,+\infty)$.

B. Demuestre que ρ es una distancia en X.

C. Encuentre las siguientes bolas:

$$B(0,1/2),\ B(0,1/3),\ B(5,1/2),\ B(5,1/3),\ B(+\infty,1/2),\ B(+\infty,1/3).$$

9 Ejercicio (una distancia especial en los números reales positivos con los puntos más y menos infinito)**.** Pongamos $X \coloneqq \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$. Definimos $f\colon X \to [-1, 1]$,

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{x}{|x|+1}, & x \in \mathbb{R}, \\ 1, & x = +\infty, \\ -1, & x = -\infty. \end{cases}$$

Definimos $\rho\colon X^2 \to [0, +\infty)$, $\rho(x, y) \coloneqq |f(x) - f(y)|$.

1. Demuestre que f es inyectiva. Se recomienda mostrar que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, y que $f(-\infty) < f(x) < f(+\infty)$ para cada x en $\mathbb{R}$.

2. Demuestre que ρ es una distancia en X.

3. Encuentre las siguientes bolas en (X, ρ):

$$B(0, 1/4), \quad B(0, 1/5), \quad B(3, 1/4), \quad B(3, 1/5), \quad B(-7, 1/4), \quad B(-7, 1/5),$$
$$B(+\infty, 1/4), \quad B(+\infty, 1/5), \quad B(+\infty, 9/10), \quad B(-\infty, 1/4), \quad B(-\infty, 1/5).$$

10 Ejercicio (una distancia especial en los números naturales con el infinito)**.** Pongamos $X \coloneqq \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Definimos $f\colon X \to [0, +\infty)$,

$$f(n) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n \in \mathbb{N}; \\ 0, & n = \infty. \end{cases}$$

Definimos $\rho\colon X^2 \to [0, +\infty)$ como $\rho(m, n) \coloneqq |f(m) - f(n)|$. Demuestre que ρ es una métrica.

11 Ejercicio (subespacio de un espacio métrico)**.** Sea (X, d) un espacio métrico y sea Y un subconjunto de X. Definimos $\rho\colon Y^2 \to [0, +\infty)$ como la restricción de la función d al conjunto Y^2:

$$\rho(a, b) \coloneqq d(a, b) \qquad (a, b \in Y).$$

Mostrar que ρ es una distancia en Y.

12 Ejercicio. Sean d_1 y d_2 dos métricas sobre un conjunto X. Definimos $d_3, d_4\colon X \times X \to [0, +\infty)$ mediante las siguientes reglas:

$$d_3(a, b) \coloneqq d_1(a, b) + d_2(a, b), \qquad d_4(a, b) \coloneqq \max\{d_1(a, b), d_2(a, b)\}.$$

Demuestre que d_3 y d_4 son métricas sobre X.

13 Ejercicio. Sea (X, d_1) un espacio métrico. Definimos $d_2 \colon X^2 \to [0, +\infty)$ mediante la siguiente regla:

$$d_2(a, b) \coloneqq \frac{d_1(a, b)}{1 + d_1(a, b)}.$$

Demuestre que d_2 es una distancia en X. Sugerencia. Primero demuestre la siguiente desigualdad:

$$\frac{u + v}{1 + u + v} \leq \frac{u}{1 + u} + \frac{v}{1 + v} \qquad (u, v \geq 0).$$

2. Propiedades elementales de métricas

14 Ejercicio (desigualdad poligonal)**.** Demuestre que para cualquier n en $\mathbb{N}$ y cualesquiera $x_1, \ldots, x_{n+1}$ en X

$$d(x_1, x_{n+1}) \leq \sum_{k=1}^{n} d(x_k, x_{k+1}).$$

15 Ejercicio (desigualdad inversa del triángulo)**.** Sean $a, b, c \in X$. Demuestre que

$$|d(a, b) - d(a, c)| \leq d(b, c).$$

16 Ejercicio (desigualdad del cuadrilátero)**.** Sean $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$. Demuestre que

$$|d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4)| \leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4).$$

3. Bolas abiertas en espacios métricos

17 Definición (bola abierta en un espacio métrico)**.** Dados a en X, $r > 0$,

$$B(a, r) \coloneqq \{x \in X \colon \; d(x, a) < r\}.$$

18 Ejercicio (el centro de la bola pertenece a la bola)**.** Sean $a \in X$, $r > 0$. Muestre que $a \in B(a, r)$.

19 Ejercicio (condición suficiente para que dos bolas sean disjuntas)**.** Sean $x_1, x_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$r_1 + r_2 \leq d(x_1, x_2).$$

Demuestre que $B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) = \varnothing$.

20 Ejercicio (condición suficiente para que una bola esté contenida en otra)**.** Sean $x_1, x_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$d(x_1, x_2) + r_1 \leq r_2.$$

Demuestre que $B(x_1, r_1) \subseteq B(x_2, r_2)$.

21 Ejercicio (la intersección de dos bolas concéntricas)**.** Sean $x \in X$, $r_1, r_2 > 0$. Demuestre que

$$B(x, r_1) \cap B(x, r_2) = B(x, \text{mín}\{r_1, r_2\}).$$

22 Ejercicio. En el espacio $\mathbb{Z}$ con la distancia usual calcule las siguientes bolas:

$$B(4, 1/3), \qquad B(4, 1), \qquad B(4, 3/2), \qquad B(4, 2), \qquad B(4, 15).$$

23 Ejercicio. Consideremos el espacio $X = [0, 10]$ con la métrica usual de los reales, $d(a, b) = |a - b|$. En otras palabras, consideramos $[0, 10]$ como un subespacio del espacio métrico $\mathbb{R}$. Calcule las bolas $B(10, 5)$ y $B(7, 4)$.

24 Ejercicio. Consideremos el cuadrante $X = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ con la métrica euclidiana del plano,

$$d((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

En este espacio consideremos las bolas $B((2, 2), 6)$ y $B((1, 1), 5)$. Haga un dibujo. Calcule las intersecciones de las circunferencias correspondientes con los ejes de las coordenadas. Demuestre que

$$B((2, 2), 6) \subsetneq B((1, 1), 5).$$

25 Ejercicio. En el espacio métrico del Ejercicio 7 ("vuelos a través de la capital") calcule las bolas $B(0, 5)$ y $B(4, 6)$.

26 Ejercicio (ejemplo cuando una bola de radio más grande es un subconjunto propio de una bola de radio más pequeño)**.** Construya un espacio métrico (X, d), puntos $x_1, x_2 \in X$ y radios $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 < r_2$, pero $B(x_2, r_2) \subsetneq B(x_1, r_1)$.

27 Ejercicio (ejemplo de dos bolas ajenas de radios grandes)**.** Construya un espacio métrico (X, d), puntos $x_1, x_2 \in X$ y radios $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 + r_2 > d(x_1, x_2)$, pero $B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) = \varnothing$. Sugerencia: se puede usar el conjunto $\mathbb{Z}$ con la métrica usual.

28 Ejercicio (la intersección de dos bolas en un espacio normado)**.** Sea V un espacio normado real o complejo y sean x_1, x_2 en V, $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 + r_2 > d(x_1, x_2)$. Demuestre que $B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) \neq \varnothing$. Sugerencia. Buscar un punto en la intersección como una combinación convexa de los puntos x_1 y x_2:

$$z = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2.$$

Se puede adivinar un número λ tal que $0 < \lambda < 1$ y $z \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$.

4. La topología asociada a una métrica

29 Ejercicio (el interior de un conjunto respecto a una métrica)**.** Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada A en $\mathcal{P}(X)$, pongamos

$$\operatorname{int}_d(A) \coloneqq \{x \in X\colon\ \exists r > 0\ B(x, r) \subseteq A\}.$$

Demuestre que $\operatorname{int}_d(A) \subseteq A$.

30 Ejercicio (la topología asociada a una métrica)**.** Sea (X, d) un espacio métrico. Pongamos

$$\tau_d \coloneqq \{A \in \mathcal{P}(X)\colon\ \operatorname{int}_d(A) = A\}.$$

En otras palabras,

$$\tau_d = \{A \in \mathcal{P}(X)\colon \quad \forall x \in A \quad \exists r > 0 \quad B(x, r) \subseteq A\}.$$

Demuestre que τ_d es una topología en X:

- la unión de cualquier subcolección de τ_d (o de cualquier familia con valores en τ_d) pertenece a τ_d;
- la intersección de cualesquiera dos elementos de τ_d pertenece a τ_d;
- $X \in \tau_d$.

31 Ejercicio (las bolas abiertas son abiertas)**.** Sean (X, d) un espacio métrico, $x \in X$, $r > 0$. Demuestre que $B(x, r) \in \tau_d$.

32 Ejercicio (la topología asociada a una métrica es de Hausdorff)**.** Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre que la topología τ_d es de Hausdorff, esto es, para cualesquiera a, b en X tales que $a \neq b$, existen A, B en τ_d tales que $a \in A$, $b \in B$ y $A \cap B = \varnothing$.

33 Ejercicio (¿cuáles de los intervalos son abiertos?)**.** Consideremos el espacio $\mathbb{R}$ con la métrica común. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Determine cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos:

$$\begin{array}{llll} \varnothing, \quad \mathbb{R}, \quad \{a\}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \\ (a, +\infty), & [a, +\infty), & (-\infty, b), & (-\infty, b], \\ (a, b), \quad [a, b), \quad (a, b], \quad [a, b]. \end{array}$$

5. Propiedades de conjuntos cerrados

Sea (X, d) un espacio métrico. Denotamos por τ_d a la topología inducida por d.

34 Ejercicio. Sea $Y \subseteq X$. ¿Cuándo se dice que Y es cerrado? Escriba la definición (en términos de conjuntos abiertos).

35 Ejercicio. Denotemos por α a la colección de todos los conjuntos cerrados. Describa α en términos de τ_d:

$$\alpha = \{Y \subseteq X\colon \quad ??? \in \tau_d\}.$$

36 Ejercicio (propiedades de conjuntos cerrados)**.** Sea α la colección de todos los conjuntos cerrados en (X, d). Demuestre las siguientes propiedades de α.

- Si $\beta \subseteq \alpha$, entonces $\cap\beta \in \alpha$. Otra forma: si $(F_j)_{j\in J}$ es una familia con valores en α, entonces $\bigcap_{j\in J} F_j \in \alpha$.

- Si $F, G \in \alpha$, entonces $F \cup G \in \alpha$.

- $\varnothing, X \in \alpha$.

37 Ejercicio (¿cuáles de los intervalos son cerrados?)**.** Consideremos el espacio $\mathbb{R}$ con la métrica común. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Determine cuáles de los siguientes conjuntos son cerrados:

$$\begin{array}{llll} \varnothing, \quad \mathbb{R}, \quad \{a\}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \\ (a, +\infty), \quad [a, +\infty), \quad (-\infty, b), \quad (-\infty, b], \\ (a, b), \quad [a, b), \quad (a, b], \quad [a, b]. \end{array}$$

38 Ejercicio (los conjuntos unipuntuales en un espacio métrico son cerrados)**.** Sea $a \in X$. Demuestre que el conjunto $\{a\}$ es cerrado.

6. Propiedades del interior

Sea (X, d) un espacio métrico. Denotamos por τ_d a la topología inducida por d.

Dado un punto x en X, denotamos por $\tau(x)$ al conjunto de todos los conjuntos abiertos que contienen al punto x:

$$\tau(x) := \{V \in \tau_d\colon\ x \in V\}.$$

Los elementos de $\tau(x)$ se llaman *vecindades abiertas* de x.

39 Ejercicio (descripción del interior en términos de las vecindades abiertas). Sea $A \subseteq X$. Demuestre que

$$\mathrm{int}_d(A) = \{x \in X\colon \quad \exists V \in \tau(x) \quad V \subseteq A\}.$$

40 Ejercicio (el interior del interior). Sea $A \subseteq X$. Demuestre que

$$\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(A),$$

así que $\mathrm{int}(A) \in \tau_d$.

41 Ejercicio (el interior de la intersección de dos conjuntos). Sean $A_1, A_2 \subseteq X$. Demuestre que

$$\mathrm{int}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{int}(A_1) \cap \mathrm{int}(A_2).$$

42 Ejercicio (propiedad creciente del interior). Sean $Y, Z \subseteq X$ tales que $Y \subseteq Z$. Demuestre que $\mathrm{int}(Y) \subseteq \mathrm{int}(Z)$.

43 Ejercicio (el interior contiene a cualquier subconjunto del conjunto original). Sea $A \subseteq X$ y sea $V \in \tau_d$ tal que $V \subseteq A$. Demuestre que $V \subseteq \mathrm{int}(A)$.

44 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$. Usando resultados de ejercicios anteriores, muestre que $\mathrm{int}(A)$ es el más grande entre todos los subconjuntos abiertos contenidos en A.

45 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$. Muestre que

$$\mathrm{int}(A) = \cup\mathcal{V}, \qquad \text{donde} \qquad \mathcal{V} = \{B \in \tau_d\colon\ B \subseteq A\}.$$

46 Ejercicio (calcular el interior de los intervalos). Consideremos el espacio $\mathbb{R}$ con la métrica común. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Calcule el interior de cada uno de los siguientes conjuntos.

$$\begin{array}{l}
\varnothing, \qquad \mathbb{R}, \qquad \{a\}, \qquad \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Q}, \\
(a, +\infty), \qquad [a, +\infty), \qquad (-\infty, b), \qquad (-\infty, b], \\
(a, b), \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad [a, b].
\end{array}$$

7. Propiedades de la cerradura

Sea (X, d) un espacio métrico. Denotamos por τ_d a la topología inducida por d.

47 Ejercicio (definición de la cerradura en términos de vecindades abiertas y en términos de bolas abiertas). Sea $A \subseteq X$. Demuestre que

$$\{x \in X\colon \quad \forall V \in \tau(x) \quad A \cap V \neq \varnothing\} = \{x \in X\colon \quad \forall r > 0 \quad A \cap B(x, r) \neq \varnothing\}.$$

El conjunto escrito en ambos lados de la igualdad se denota por $\mathrm{cl}(A)$ y se llama la *cerradura* de A.

48 Ejercicio (relación entre la cerradura y el interior)**.** Sea $A \subseteq X$. Demuestre que

$$X \setminus \operatorname{cl}(A) = \operatorname{int}(X \setminus A).$$

Deduzca también otras formas equivalentes de esta fórmula:

$$\operatorname{cl}(A) = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A), \qquad \operatorname{int}(Y) = X \setminus \operatorname{cl}(X \setminus Y).$$

49 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$. Muestre que $A \subseteq \operatorname{cl}(A)$.

50 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$. Muestre que $\operatorname{cl}(A)$ es un conjunto cerrado.

51 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$ tal que A es un conjunto cerrado. Muestre que $\operatorname{cl}(A) = A$.

52 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$. Muestre que A es cerrado si, y solo si, $\operatorname{cl}(A) = A$.

53 Ejercicio (la cerradura de la cerradura)**.** Sea $A \subseteq X$. Muestre que $\operatorname{cl}(\operatorname{cl}(A)) = \operatorname{cl}(A)$.

54 Ejercicio (la cerradura de la unión de dos conjuntos)**.** Sean $A_1, A_2 \subseteq X$. Muestre que

$$\operatorname{cl}(A_1 \cup A_2) = \operatorname{cl}(A_1) \cup \operatorname{cl}(A_2).$$

55 Ejercicio (la propiedad creciente de la cerradura)**.** Sean $Y, Z \subseteq X$ tales que $Y \subseteq Z$. Demuestre que $\operatorname{cl}(Y) \subseteq \operatorname{cl}(Z)$.

56 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$ y sea F un conjunto cerrado tal que $A \subseteq F$. Demuestre que $\operatorname{cl}(A) \subseteq F$.

57 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$. Muestre que $\operatorname{cl}(A)$ es el más pequeño entre todos los subconjuntos cerrados que contienen al conjunto A.

58 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$. Muestre que

$$\operatorname{cl}(A) = \cup\mathcal{F}, \qquad \text{donde} \qquad \mathcal{F} = \{B \subseteq X\colon \quad X \setminus B \in \tau_d \quad \wedge \quad A \subseteq B\}.$$

59 Ejercicio (calcular la cerradura de los intervalos)**.** Consideremos el espacio $\mathbb{R}$ con la métrica común. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Calcule la cerradura de cada uno de los siguientes conjuntos.

$$\begin{array}{llll} \varnothing, \quad \mathbb{R}, \quad \{a\}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \\ (a, +\infty), \quad [a, +\infty), \quad (-\infty, b), \quad (-\infty, b], \\ (a, b), \quad [a, b), \quad (a, b], \quad [a, b]. \end{array}$$

8. Subconjuntos densos en un espacio métrico

Sea (X, d) un espacio métrico. Denotamos por τ_d a la topología inducida por d.

60 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$. ¿Cuándo se dice que A es denso (en X)? Escriba la definición en términos de la cerradura de A. Escriba definiciones equivalentes en términos de vecindades abiertas y en términos de bolas abiertas.

61 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$. Demuestre que A es denso si, y solo si, cualquier subconjunto abierto no vacío del espacio X se intersecta con A.

62 Ejercicio (la intersección de dos conjuntos abiertos densos)**.** Sean $V, W \in \tau_d$ tales que $\operatorname{cl}(V) = X$ y $\operatorname{cl}(W) = X$. Demuestre que $\operatorname{cl}(V \cap W) = X$.

63 Ejercicio. Muestre que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Utilice el siguiente hecho: para cada a, b en $\mathbb{R}$, si $a < b$, entonces existe q en $\mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$.

9. Propiedades de la frontera

Sea (X, d) un espacio métrico. Denotamos por τ_d a la topología inducida por d.

64 Ejercicio (dos fórmulas equivalentes para la frontera de un conjunto)**.** Sea $A \subseteq X$. Demuestre que

$$\operatorname{cl}(A) \setminus \operatorname{int}(A) = \operatorname{cl}(A) \cap \operatorname{cl}(X \setminus A).$$

El conjunto $\operatorname{cl}(A) \setminus \operatorname{int}(A)$ se llama la *frontera* de A. Lo denotamos por $\operatorname{fr}(A)$.

65 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$ y sea $x \in X$. Mostrar que

$$x \in \operatorname{fr}(A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall r > 0 \qquad B(x, r) \cap A \neq \varnothing \quad \wedge \quad B(x, r) \setminus A \neq \varnothing.$$

66 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$ y sea $x \in X$. Demuestre que

$$x \in \operatorname{fr}(A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall V \in \tau(x) \qquad V \cap A \neq \varnothing \quad \wedge \quad V \setminus A \neq \varnothing.$$

67 Ejercicio. Consideremos el espacio $\mathbb{R}$ con la métrica común. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Encuentre $\operatorname{fr}(A)$ para cada uno de los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{llll} \varnothing, \quad \mathbb{R}, \quad \{a\}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \\ (a, +\infty), \quad [a, +\infty), \quad (-\infty, b), \quad (-\infty, b], \\ (a, b), \quad [a, b), \quad (a, b], \quad [a, b]. \end{array}$$

68 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$. Demuestre que $\operatorname{fr}(A)$ es un conjunto cerrado.

69 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$. Demuestre que A es cerrado si, y solo si, $\operatorname{fr}(A) \subseteq A$.

70 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$. Demuestre que

$$\operatorname{fr}(\operatorname{cl}(A)) \subseteq \operatorname{fr}(A), \qquad \operatorname{fr}(\operatorname{int}(A)) \subseteq \operatorname{fr}(A).$$

Construya un ejemplo cuando estos tres conjuntos, $\operatorname{fr}(A)$, $\operatorname{fr}(\operatorname{cl}(A))$ y $\operatorname{fr}(\operatorname{int}(A))$, son distintos a pares.

71 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$. Demuestre que $\operatorname{fr}(\operatorname{fr}(A)) \subseteq \operatorname{fr}(A)$. Construya un ejemplo cuando $\operatorname{fr}(\operatorname{fr}(A)) \neq \operatorname{fr}(A)$.

72 Ejercicio (la frontera de la unión de dos conjuntos)**.** Sean $A, B \subseteq X$. Demuestre que $\operatorname{fr}(A \cup B) \subseteq \operatorname{fr}(A) \cup \operatorname{fr}(B)$. Construya un ejemplo donde no se cumple la igualdad.

73 Ejercicio (la frontera de la intersección de dos conjuntos)**.** Sean $A, B \subseteq X$. Demostrar que $\operatorname{fr}(A \cap B) \subseteq \operatorname{fr}(A) \cup \operatorname{fr}(B)$. Construya un ejemplo donde no se cumple la igualdad.

10. Repaso de algunas propiedades de imágenes y preimágenes

Los ejercicios de esta sección no aparecen en el examen, pero sus resultados se usan mucho para estudiar funciones continuas, por eso se recomienda hacer un repaso.

En este repaso suponemos que $f\colon X \to Y$, donde X, Y son algunos conjuntos.

74 Ejercicio. Sean $P \subseteq X$, $x \in P$. Demuestre que $f(x) \in f[P]$.

75 Ejercicio (sobre la imágen de la preimágen)**.** Sea $Q \subseteq Y$. Demuestre que

$$f[f^{-1}[Q]] \subseteq Q.$$

76 Ejercicio. Construya algún ejemplo tal que

$$f[f^{-1}[Q]] \neq Q.$$

Hay que indicar X, Y, f, Q.

77 Ejercicio (sobre la preimágen de la imagen)**.** Sea $P \subseteq X$. Demuestre que

$$P \subseteq f^{-1}[f[P]].$$

78 Ejercicio. Construya algún ejemplo tal que

$$P \neq f^{-1}[f[P]].$$

Hay que indicar X, Y, f, P.

79 Ejercicio (la propiedad creciente de la imagen)**.** Sean $P_1, P_2 \subseteq X$ tales que $P_1 \subseteq P_2$. Demuestre que

$$f[P_1] \subseteq f[P_2].$$

80 Ejercicio (la propiedad creciente de la preimagen)**.** Sean $Q_1, Q_2 \subseteq Y$ tales que $Q_1 \subseteq Q_2$. Demuestre que

$$f^{-1}[Q_1] \subseteq f^{-1}[Q_2].$$

81 Ejercicio (sobre contenciones, imágenes y preimágenes)**.** Sean X, Y algunos conjuntos, $f\colon X \to Y$ una función, $P \subseteq X$, $Q \subseteq Y$. Demuestre que

$$f[P] \subseteq Q \qquad \Longleftrightarrow \qquad P \subseteq f^{-1}[Q].$$

11. Funciones continuas

En esta sección suponemos que (X, d_X) e (Y, d_Y) son espacios métricos. Denotamos por τ_X y τ_Y las topologías inducidas correspondientes.

82 Ejercicio. ¿Cuándo se dice que f es continua? Escriba la definición en términos de conjuntos abiertos y sus preimágenes. Denotamos por $C(X, Y)$ al conjunto de todas las funciones continuas $X \to Y$.

83 Ejercicio. Sea $x \in X$. ¿Cuándo se dice que f es continua en el punto x? Escriba la definición en términos de vecindades abiertas. Escriba un criterio en términos de bolas.

84 Ejercicio (continuidad global y local)**.** Demuestre que f es continua si, y solo si, f es continua en cada punto del dominio.

85 Ejercicio (criterio de continuidad en términos de las preimágenes de los conjuntos cerrados)**.** Enuncie y demuestre el criterio de continuidad en términos de preimágenes de conjuntos cerrados.

86 Ejercicio (criterio de continuidad en términos de los interiores de las preimágenes)**.**]
Sea $f\colon X \to Y$. Demuestre que f es continua si y solo si para cada $G \subseteq Y$ se cumple que

$$f^{-1}[\mathrm{int}_Y(G)] \subseteq \mathrm{int}_X(f^{-1}[G]). \qquad (1)$$

87 Ejercicio (criterio de continuidad en términos de las cerraduras de las preimágenes)**.** Sea $f\colon X \to Y$. Demuestre que f es continua si, y solo si, para cada $G \subseteq X$ se cumple que
$$\mathrm{cl}_X(f^{-1}[G]) \subseteq f^{-1}[\mathrm{cl}_Y(G)]. \tag{2}$$

88 Ejercicio (criterio de continuidad en términos de las cerraduras de las imágenes)**.** Sea $f\colon X \to Y$. Demuestre que f es continua si, y solo si, para cada $A \subseteq X$ se cumple que
$$f[\mathrm{cl}_X(A)] \subseteq \mathrm{cl}_Y(f[A]). \tag{3}$$

89 Ejercicio (continuidad de las funciones constantes)**.** Sea $c \in Y$. Definimos f mediante la regla
$$f(x) \coloneqq c \qquad (x \in X).$$
Demuestre que f es continua.

90 Ejercicio. Consideremos los espacios métricos $X = \mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{Z}$ con las distancias comunes. Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ mediante la regla
$$f(x) \coloneqq 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Consideremos el conjunto $A \coloneqq \{5\}$. Calcule $\mathrm{int}_Y(f[A])$ y $f[\mathrm{int}_X(A)]$.

91 Ejercicio. Consideremos los espacios métricos $X = \mathbb{Z}$ e $Y = \mathbb{R}$ con las distancias comunes. Definimos $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ mediante la regla
$$f(x) \coloneqq 0 \qquad (x \in \mathbb{Z}).$$
Consideremos el conjunto $A \coloneqq \{5\}$. Calcule $\mathrm{int}_Y(f[A])$ y $f[\mathrm{int}_X(A)]$.

Los Ejercicios 90 y 91 muestran que la continuidad de f no se puede describir en términos de una contención entre los conjuntos $\mathrm{int}_Y(f[A])$ y $f[\mathrm{int}_X(A)]$.

92 Ejercicio (la distancia a un punto elegido es una función continua)**.** Sea $a \in X$. Definimos $f\colon X \to [0, +\infty)$,
$$f(x) \coloneqq d(x, a).$$
Demuestre que f es continua.

93 Ejercicio (los conjuntos definidos por funciones continuas y desigualdades estrictas son abiertos)**.** Sea $f \in C(X, \mathbb{R})$ y sea $v \in \mathbb{R}$. Demuestre que el siguiente conjunto es abierto:
$$A \coloneqq \{x \in X\colon\ f(x) < v\}.$$
Demuestre que el siguiente conjunto es cerrado:
$$H \coloneqq \{x \in X\colon\ f(x) \le v\}.$$

12. Subespacios de espacios métricos

94 Ejercicio. Sea X un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. ¿Qué significa la frase "consideramos Y como subespacio de X"? A saber, ¿con qué métrica se considera Y?

En los siguientes ejercicios suponemos que X un espacio métrico, $Y \subseteq X$. Consideremos Y como subespacio del espacio métrico X.

95 Ejercicio (descripción de subconjuntos abiertos en un subespacio métrico)**.** Sea $A \subseteq Y$. ¿Cuándo A es abierto en Y?

96 Ejercicio. Sean $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{Z}$, $A = \{1\}$. Muestre que A no es abierto en X, pero es abierto en Y.

97 Ejercicio (descripción de subconjuntos cerrados en un subespacio métrico)**.** Sea $A \subseteq Y$. ¿Cuándo A es cerrado en Y?

98 Ejercicio. Sean $X = \mathbb{R}$, $Y = (0, +\infty)$, $A = (0, 5]$. Muestre que A no es cerrado en X, pero es cerrado en Y.

99 Ejercicio (fórmula para la cerradura de un conjunto en un subespacio métrico)**.** Sea $A \subseteq Y$. Demuestre que

$$\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}_X(A) \cap Y.$$

100 Ejercicio (fórmula para el interior de un conjunto en un subespacio métrico)**.** Sea $A \subseteq Y$. Demuestre que

$$\mathrm{int}_Y(A) = \mathrm{int}_X(A \cup (X \setminus Y)) \cap Y.$$

101 Ejercicio. Mostrar un ejemplo cuando $\mathrm{int}_Y(A) \neq \mathrm{int}_X(A)$.