Medidas y funciones medibles

Problemas para examen

Estos problemas están redactados por Egor Maximenko, con ayuda de Breitner Arley Ocampo Gómez.

Sigma-álgebras

1. Propiedades elementales de σ-álgebras. Demuestre que una σ-álgebra es cerrada bajo las intersecciones numerables, bajo las uniones finitas, bajo las intersecciones finitas y bajo la operación de la diferencia de los conjuntos.

2. Propiedades de conjuntos finitos o numerables (repaso). Recuerde cómo se demuestran las siguientes proposiciones:

- Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos a lo más numerables. Entonces la unión $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ también es un conjunto a lo más numerable.
- Sea B un conjunto a lo más numerable y sea $C \subset B$. Entonces que C también es a lo más numerable.

3. Subconjuntos finitos o numerables de un conjunto no numerable y sus complementos. Sea X un conjunto no numerable. Denotemos por $\mathcal{N}$ al conjunto de los $A \subset X$ tales que A es finito o numerable. Pongamos

$$\mathcal{F} \coloneqq \{A \subset X\colon\ A \in \mathcal{N}\ \vee\ X \setminus A \in \mathcal{N}\}.$$

Demuestre que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

4. Intersección de un conjunto de σ-álgebras. Demuestre que la intersección de cualquier conjunto de σ-álgebras es una σ-álgebra.

5. Definición de la σ-álgebra generada por una colección de conjuntos. Escriba la definición de la σ-álgebra generada por una colección de conjuntos.

6. Ejemplo: la σ-álgebra generada por una colección dada de conjuntos. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea $\mathcal{G} = \{\{1, 2\}\}$. Encuentre la σ-álgebra generada por $\mathcal{G}$. Enuncie la respuesta y presente una demostración completa.

7. Ejemplo: la σ-álgebra generada por una colección dada de conjuntos. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea $\mathcal{G} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}\}$. Encuentre la σ-álgebra generada por $\mathcal{G}$. Enuncie la respuesta y presente una demostración completa.

8. σ-álgebra generada por los subconjuntos unipuntuales de un conjunto no numerable. Sea X un conjunto no numerable y sea

$$\mathcal{G} \coloneqq \{\{a\}\colon\ a \in X\}.$$

Describa la σ-álgebra generada por $\mathcal{F}$.

Medidas

En estos problemas se supone que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

9. Propiedad aditiva. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$ disjuntos a pares. Demuestre que

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j).$$

10. La suma de las medidas de la unión e intersección de dos conjuntos. Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Demuestre que

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

11. Expresión para la medida de la unión. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $\mu(A \cap B) < +\infty$. Demuestre que

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

12. Ejemplo: un defecto de la fórmula para la medida de la unión. Encuentre un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y un par de conjuntos $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $\mu(A \cap B) = +\infty$. Muestre que la fórmula del Ejercicio 11 no funciona en este caso.

13. Medida de la diferencia. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subset B$. Demuestre que

$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B).$$

14. Monotonía de medida. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subset B$. Demuestre que

$$\mu(A) \le \mu(B).$$

15. Medida de la unión de una sucesión creciente (continuidad de medida por abajo). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de conjuntos $\mathcal{F}$-medibles, esto es,

$$\forall n \in \{1, 2, \ldots\} \qquad A_n \subset A_{n+1}.$$

Denotemos por B a la unión de esta sucesión de conjuntos: $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(B).$$

16. Medida de la intersección de una sucesión decreciente (continuidad de medida por arriba). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de conjuntos $\mathcal{F}$-medibles, esto es,

$$\forall n \in \{1, 2, \ldots\} \qquad A_{n+1} \subset A_n.$$

Supóngase que el conjunto A_1 es de medida finita, es decir $\mu(A_1) < +\infty$. Denotemos por B a la intersección de esta sucesión de conjuntos: $B = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \mu(B).$$

17. Medida de la intersección de una sucesión decreciente, contraejemplo. Construya un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y una sucesión decreciente $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos $\mathcal{F}$-medibles tales que

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) < \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

18. Propiedad subaditiva de la medida, el caso de dos conjuntos. Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Demuestre que $\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B)$. Indicación: determine, si es mejor aplicar el resultado del Ejercicio 10 o el resultado del Ejercicio 11. Recuerde que el Ejercicio 11 tiene una condición adicional.

19. Propiedad subaditiva de la medida, el caso de una unión finita. Demuestre por inducción sobre n que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

20. Propiedad subaditiva de la medida, el caso de una unión numerable. Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{F}$. Demuestre que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

21. Criterio de que una medida es $\boldsymbol{\sigma}$-finita. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Existe una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos $\mathcal{F}$-medibles tales que $\mu(A_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(b) Existe una sucesión creciente $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos $\mathcal{F}$-medibles tales que $\mu(B_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

(c) Existe una sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos por pares, $\mathcal{F}$-medibles y tales que $\mu(C_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

Si μ cumple con estas condiciones, entonces se llama σ-finita.

Funciones medibles

22. Criterio general de la medibilidad de una función en términos de las preimágenes de los conjuntos generadores de la sigma-álgebra en el contradominio. Sean X, Y conjuntos, sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ algunas σ-álgebras sobre X y Y respectivamente, y sea $\mathcal{G} \subset 2^Y$ un conjunto de subconjuntos de Y tal que $\mathcal{H}$ está generada por $\mathcal{G}$. Además sea $f\colon X \to Y$ una función. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(A) f es $\mathcal{F}$-$\mathcal{H}$ medible, esto es, $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{H}$.

(B) $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{G}$.

23. Criterio de la medibilidad de una función real. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es $\mathcal{F}$-medible, esto es, $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ para todo conjunto B medible en $\mathbb{R}$.

(b) $f^{-1}[(a, +\infty)] \in \mathcal{F}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(c) $f^{-1}[(r, +\infty)] \in \mathcal{F}$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

24. Criterio de la medibilidad de una función con valores en el eje real extendido. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sea $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es $\mathcal{F}$-medible, esto es, $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ para todo conjunto B medible en $\overline{\mathbb{R}}$.

(b) $f^{-1}[(a, +\infty]] \in \mathcal{F}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(c) $f^{-1}[(r, +\infty]] \in \mathcal{F}$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

25. Criterio de medibilidad de una función compleja. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sea $f\colon X \to \mathbb{C}$. Denotemos por g y h la partes real y la parte imaginaria de f:

$$g = \mathrm{Re}(f), \qquad h = \mathrm{Im}(f).$$

Demuestre que $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ si y sólo si $g, h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$.

26. Criterio de la medibilidad de la función característica de un conjunto. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F} \subset 2^X$ una σ-álgebra sobre X y sea $A \subset X$. Denotemos por χ_A a la *función característica* (llamada también *función indicadora*) del conjunto A:

$$\chi_A \colon X \to \mathbb{R}, \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A, \end{cases}$$

Demuestre que la función χ_A es $\mathcal{F}$-medible si y sólo si $A \in \mathcal{F}$.

27. Medibilidad de una función continua. Sean X, Y espacios topológicos y sean $\mathcal{B}_X$ y $\mathcal{B}_Y$ sus álgebras de Borel. Sea $f \in C(X, Y)$. Demuestre que $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B}_X, Y, \mathcal{B}_Y)$, esto es, f es $\mathcal{B}_X$–$\mathcal{B}_Y$ medible.

Operaciones con funciones medibles

28. El supremo de una sucesión de funciones medibles. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{F}$-medibles, $f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que es $\mathcal{F}$-medible la función $g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, donde

$$\forall x \in X \qquad g(x) \coloneqq \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x).$$

29. El ínfimo de una sucesión de funciones medibles. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{F}$-medibles, $f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que es $\mathcal{F}$-medible la función $g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, donde

$$\forall x \in X \qquad g(x) \coloneqq \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x).$$

30. Medibilidad de la composición de funciones medibles. Sean X, Y, Z conjuntos y sean $\mathcal{F} \subset 2^X$, $\mathcal{G} \subset 2^Y$, $\mathcal{H} \subset 2^Z$ algunas σ-álgebras. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{G})$ y sea $g \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, Z, \mathcal{H})$. Demuestre que $g \circ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Z, \mathcal{H})$.

31. Medibilidad de la composición de una función continua con una función medible. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sean Y, Z espacio topológicos. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)$ y sea $g \in C(Y, Z)$. Demuestre que $g \circ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Z)$.

32. Cada subconjunto abierto del plano se puede representar como una unión numerable de ladrillos abiertos. Sea A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$. Demuestre que existen $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n) \times (c_n, d_n).$$

33. Teorema sobre la medibilidad de una función continua de dos argumentos reales, compuesta con dos funciones medibles. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible, sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ y sea $\Phi \in C(\mathbb{R}^2, Y)$, donde Y es un espacio topológico. Definamos $h\colon X \to Y$ mediante la siguiente fórmula:

$$\forall x \in X \qquad h(x) = \Phi(f, g).$$

Demuestre que $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)$. Sugerencia: puede utilizar el resultado de 32.

Hay por lo menos dos caminos para demostrar la medibilidad de la suma y producto de dos funciones reales medibles. Primero consideramos el método basado en el Teorema 33.

34. Suma y producto de dos funciones reales medibles. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Demuestre que $f + g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ y $fg \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Sugerencia: aplicar el Teorema 33.

35. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Usando el resultado del problema anterior demuestre que los siguientes conjuntos son medibles:

$$\big\{x \in X\colon\ f(x) < g(x)\big\}, \qquad \big\{x \in X\colon\ f(x) > g(x)\big\}, \qquad \big\{x \in X\colon\ f(x) = g(x)\big\}.$$

Ahora estudiamos otro método que utiliza el criterio de la medibilidad de funciones reales y la densidad de números racionales.

36. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Demuestre que

$$\big\{x \in X\colon\ f(x) < g(x)\big\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in X\colon\ f(x) < r\} \cap \{x \in X\colon\ g(x) > r\}$$

y deduzca de aquí que el conjunto $\big\{x \in X\colon\ f(x) < g(x)\big\}$ es medible.

37. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Demuestre que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X\colon\ f(x) + g(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in X\colon\ f(x) > r\} \cap \{x \in X\colon\ g(x) > \alpha - r\}.$$

Deduzca de aquí que $f + g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$.

38. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Demuestre que $f^2 \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$.

39. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\lambda f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$.

40. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Verifique las *identidades de polarización*

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right), \qquad fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right).$$

Usando cualesquiera de estas dos identidades y los resultados de ejercicios anteriores muestre que $fg \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$.

41. Suma y producto de dos funciones complejas medibles. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demuestre que $f + g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y $fg \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Funciones simples

42. Lema. Para todo n en $\{1, 2, 3, \ldots\}$ definimos la función $\varphi_n \colon [0, +\infty] \to [0, +\infty)$ de la siguiente manera:

$$\varphi_n(t) \coloneqq \begin{cases} \frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}, & 0 \le t < n; \\ n, & t \ge n. \end{cases}$$

Demuestre las siguientes propiedades de las funciones φ_n.

1. El conjunto de los valores de la función φ_n es $\{k \cdot 2^{-n} \colon \ 0 \le k \le n\}$.

2. Para cada k en $\{0, \ldots, n \cdot 2^n - 1\}$,

   $$\varphi_n^{-1}[\{k \cdot 2^{-n}\}] = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right).$$

   Además,

   $$\varphi_n^{-1}[\{n\}] = [n, +\infty].$$

3. La función φ_n es simple y medible.

4. Para todo t en $[0, +\infty]$ y todo n en $\{1, 2, 3, \ldots\}$, $\varphi_n(t) \le \varphi_{n+1}(t)$.

5. Para todo t en $[0, +\infty]$,

   $$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = t.$$

43. Proposición sobre la aproximación de funciones medibles positivas por funciones simples medibles positivas. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Demuestre que para toda función $\mathcal{F}$-medible positiva $f \colon X \to [0, +\infty]$ existe una sucesión de funciones g_n simples $\mathcal{F}$-medibles positivas tal que en todo punto x en X la sucesión $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es creciente y $g_n(x) \to f(x)$.