Medidas y funciones medibles

Problemas para examen

Estos problemas están redactados por Egor Maximenko, con ayuda de Breitner Arley Ocampo Gómez.

Sigma-álgebras

1. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{F} \subseteq 2^X$. ¿Cuándo se dice que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre X? Recordar la definición.

2. Propiedades elementales de $\boldsymbol{\sigma}$-álgebras. Demostrar que cada σ-álgebra es cerrada bajo las intersecciones numerables, bajo las uniones finitas, bajo las intersecciones finitas, bajo la diferencia de dos conjuntos y bajo la diferencia simétrica de dos conjuntos.

3. Las álgebras finitas de conjuntos son $\boldsymbol{\sigma}$-álgebras. Sea $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ tal que $\varnothing \in \mathcal{F}$, $X \setminus A \in \mathcal{F}$ para cada A en $\mathcal{F}$, y $A \cup B \in \mathcal{F}$ para cualesquiera A, B en $\mathcal{F}$. Demostrar que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

4. Propiedades de conjuntos finitos o numerables (repaso). Recordar cómo se demuestran las siguientes proposiciones.

- Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos a lo más numerables. Entonces la unión $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ también es un conjunto a lo más numerable.
- Sea B un conjunto a lo más numerable y sea $C \subseteq B$. Entonces que C también es a lo más numerable.

5. Subconjuntos finitos o numerables de un conjunto no numerable y sus complementos. Sea X un conjunto no numerable. Denotemos por $\mathcal{N}$ al conjunto de los $A \subseteq X$ tales que A es finito o numerable. Pongamos

$$\mathcal{F} \coloneqq \{A \subseteq X:\ A \in \mathcal{N} \ \vee\ X \setminus A \in \mathcal{N}\}.$$

Demuestre que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

6. Sigma-álgebra restringida. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $Y \in \mathcal{F}$. Pongamos

$$\mathcal{F}_Y \coloneqq \{A \in \mathcal{F}:\ A \subseteq Y\}.$$

Mostrar que

$$\mathcal{F}_Y = \mathcal{F} \cap 2^Y.$$

Demostrar que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

La sigma-álgebra generada por una colección de conjuntos

7. La intersección de un conjunto de σ-álgebras. Sea X un conjunto y sea Ψ un conjunto no vacío de σ-álgebras sobre X. Demostrar que $\cap\Psi$ es una σ-álgebra.

8. Definición de la σ-álgebra generada por una colección de conjuntos. Escribir la definición de la σ-álgebra generada por una colección de conjuntos.

9. Ejemplo: la σ-álgebra generada por una colección dada de conjuntos. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea $\mathcal{G} = \{\{1, 2\}\}$. Encontrar la σ-álgebra generada por $\mathcal{G}$. Enunciar la respuesta y presente una demostración completa.

10. Ejemplo: la σ-álgebra generada por una colección dada de conjuntos. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea $\mathcal{G} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}\}$. Encontrar la σ-álgebra generada por $\mathcal{G}$. Enunciar la respuesta y presente una demostración completa.

11. La σ-álgebra generada por los subconjuntos unipuntuales de un conjunto no numerable. Sea X un conjunto no numerable y sea

$$\mathcal{G} \coloneqq \{\{a\} \colon \ a \in X\}.$$

Describir la σ-álgebra generada por $\mathcal{F}$.

Medidas

En estos problemas se supone que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

12. Propiedad aditiva. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$ disjuntos a pares. Demostrar que

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j).$$

13. La suma de las medidas de la unión e intersección de dos conjuntos. Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Demostrar que

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

14. Expresión para la medida de la unión. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $\mu(A \cap B) < +\infty$. Demostrar que

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

15. Ejemplo: un defecto de la fórmula para la medida de la unión. Encontrar un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y un par de conjuntos $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $\mu(A \cap B) = +\infty$. Mostrar que la fórmula del Ejercicio 14 no funciona en este caso.

16. Medida de la diferencia. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Demostrar que

$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B).$$

17. Monotonía de la medida. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Demostrar que

$$\mu(A) \le \mu(B).$$

18. La medida de la unión de una sucesión creciente (continuidad de medida por abajo). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de conjuntos $\mathcal{F}$-medibles, esto es,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad A_n \subseteq A_{n+1}.$$

Denotemos por B a la unión de esta sucesión de conjuntos: $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(B).$$

19. La medida de la intersección de una sucesión decreciente (continuidad de medida por arriba). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de conjuntos $\mathcal{F}$-medibles, esto es,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad A_{n+1} \subseteq A_n.$$

Supóngamos que el conjunto A_1 es de medida finita, es decir, $\mu(A_1) < +\infty$. Denotemos por B a la intersección de esta sucesión de conjuntos: $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \mu(B).$$

20. La medida de la intersección de una sucesión decreciente, contraejemplo. Construir un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y una sucesión decreciente $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos $\mathcal{F}$-medibles tales que

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) < \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

21. La propiedad subaditiva de la medida, el caso de dos conjuntos. Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Demostrar que

$$\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B).$$

Indicación: determinar, si es mejor aplicar el resultado del Ejercicio 13 o el resultado del Ejercicio 14. Recuerdar que el Ejercicio 14 tiene una condición adicional.

22. La propiedad subaditiva de la medida, el caso de una unión finita. Demostrar por inducción sobre n que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

23. La propiedad subaditiva de la medida, el caso de una unión numerable. Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{F}$. Demostrar que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

24. Criterio de que una medida es $\boldsymbol{\sigma}$-finita. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Existe una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos $\mathcal{F}$-medibles tales que $\mu(A_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(b) Existe una sucesión creciente $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos $\mathcal{F}$-medibles tales que $\mu(B_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

(c) Existe una sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos por pares, $\mathcal{F}$-medibles y tales que $\mu(C_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

Si μ cumple con estas condiciones, entonces se llama σ-finita.

25. Un criterio de la propiedad $\boldsymbol{\sigma}$-aditiva. Sean X un conjunto, $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X, $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty)$. Notemos que $\mu(X) < +\infty$. Supongamos que μ tiene las siguientes propiedades:

(P1) $\mu(\varnothing) = 0$.

(P2) La función μ es finitamente aditiva: si $m \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_m$ son conjuntos disjuntos pertenecientes a $\mathcal{F}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k).$$

(P3) La función es "continua por abajo" en el siguiente sentido: si $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de elementos de $\mathcal{F}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k).$$

Demostrar que μ es σ-aditiva.

26. Subespacio de un espacio de medida. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $Y \in \mathcal{F}$. Definimos $\mathcal{F}_Y$ como en el Problema 6 y definimos μ_Y como $\mu|_{\mathcal{F}_Y}$, es decir,

$$\mu_Y(A) \coloneqq \mu(A) \qquad (A \in \mathcal{F}_Y).$$

Mostrar que μ_Y es una medida.

Sobre la $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra de Borel de la recta real

27. La sigma-álgebra de Borel de la recta real está generada por los rayos derechos abiertos. Demostrar que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ está generada por $\mathcal{G}$, donde

$$\mathcal{G} \coloneqq \big\{(a, +\infty)\colon\ a \in \mathbb{R}\big\}.$$

28. La sigma-álgebra de Borel de la recta real está generada por los rayos derechos abiertos con extremos racionales. Demostrar que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ está generada por la colección

$$\big\{(a, +\infty)\colon\ a \in \mathbb{Q}\big\}.$$

29. La sigma-álgebra de Borel de la recta real está generada por los intervalos cerrados acotados. Demostrar que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ está generada por la colección

$$\big\{[a, b]\colon\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\big\}.$$

Funciones medibles

30. Criterio general de la medibilidad de una función en términos de las preimágenes de los conjuntos generadores de la sigma-álgebra en el contradominio. Sean X, Y conjuntos, sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ algunas σ-álgebras sobre X y Y respectivamente, y sea $\mathcal{G} \subseteq 2^Y$ un conjunto de subconjuntos de Y tal que $\mathcal{H}$ está generada por $\mathcal{G}$. Además sea $f\colon X \to Y$ una función. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(A) f es $\mathcal{F}$-$\mathcal{H}$ medible, esto es, $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{H}$.

(B) $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{G}$.

31. Criterio de la medibilidad de una función real. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es $\mathcal{F}$-medible, esto es, $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ para todo conjunto B medible en $\mathbb{R}$.

(b) $f^{-1}[(a, +\infty)] \in \mathcal{F}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(c) $f^{-1}[(r, +\infty)] \in \mathcal{F}$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

32. Criterio de la medibilidad de una función con valores en el eje real extendido. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sea $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es $\mathcal{F}$-medible, esto es, $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ para todo conjunto B medible en $\overline{\mathbb{R}}$.

(b) $f^{-1}[(a, +\infty]] \in \mathcal{F}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(c) $f^{-1}[(r, +\infty]] \in \mathcal{F}$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

33. Criterio de medibilidad de una función compleja. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sea $f\colon X \to \mathbb{C}$. Denotemos por g y h la partes real y la parte imaginaria de f:

$$g = \operatorname{Re}(f), \qquad h = \operatorname{Im}(f).$$

Demuestre que $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ si y sólo si $g, h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$.

34. Criterio de la medibilidad de la función característica de un conjunto. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ una σ-álgebra sobre X y sea $A \subseteq X$. Denotemos por χ_A a la *función característica* (llamada también *función indicadora*) del conjunto A:

$$\chi_A\colon X \to \mathbb{R}, \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A, \end{cases}$$

Demuestre que la función χ_A es $\mathcal{F}$-medible si y sólo si $A \in \mathcal{F}$.

35. Medibilidad de una función continua. Sean X, Y espacios topológicos y sean $\mathcal{B}_X$ y $\mathcal{B}_Y$ sus álgebras de Borel. Sea $f \in C(X, Y)$. Demuestre que $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B}_X, Y, \mathcal{B}_Y)$, esto es, f es $\mathcal{B}_X$–$\mathcal{B}_Y$ medible.

Operaciones con funciones medibles

36. El supremo de una sucesión de funciones medibles. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{F}$-medibles, $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que es $\mathcal{F}$-medible la función $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, donde

$$\forall x \in X \qquad g(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

37. El ínfimo de una sucesión de funciones medibles. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{F}$-medibles, $f_n\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Demuestre que es $\mathcal{F}$-medible la función $g\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$, donde

$$\forall x\in X\qquad g(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

38. Medibilidad de la composición de funciones medibles. Sean X, Y, Z conjuntos y sean $\mathcal{F}\subseteq 2^X$, $\mathcal{G}\subseteq 2^Y$, $\mathcal{H}\subseteq 2^Z$ algunas σ-álgebras. Sea $f\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},Y,\mathcal{G})$ y sea $g\in\mathcal{M}(Y,\mathcal{G},Z,\mathcal{H})$. Demuestre que $g\circ f\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},Z,\mathcal{H})$.

39. Medibilidad de la composición de una función continua con una función medible. Sea $(X,\mathcal{F})$ un espacio medible y sean Y, Z espacio topológicos. Sea $f\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},Y)$ y sea $g\in C(Y,Z)$. Demuestre que $g\circ f\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},Z)$.

40. Cada subconjunto abierto del plano se puede representar como una unión numerable de ladrillos abiertos. Sea A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$. Demuestre que existen $a_n, b_n, c_n, d_n\in\mathbb{R}$ tales que

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n)\times(c_n, d_n).$$

41. Teorema sobre la medibilidad de una función continua de dos argumentos reales, compuesta con dos funciones medibles. Sea $(X,\mathcal{F})$ un espacio medible, sean $f, g\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{R})$ y sea $\Phi\in C(\mathbb{R}^2, Y)$, donde Y es un espacio topológico. Definamos $h\colon X\to Y$ mediante la siguiente fórmula:

$$\forall x\in X\qquad h(x) = \Phi(f,g).$$

Demuestre que $h\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},Y)$. Sugerencia: puede utilizar el resultado de 40.

Hay por lo menos dos caminos para demostrar la medibilidad de la suma y producto de dos funciones reales medibles. Primero consideramos el método basado en el Teorema 41.

42. Suma y producto de dos funciones reales medibles. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sean $f, g\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{R})$. Demuestre que $f+g\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{R})$ y $fg\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{R})$. Sugerencia: aplicar el Teorema 41.

43. Sean $f, g\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\overline{\mathbb{R}})$. Usando el resultado del problema anterior demuestre que los siguientes conjuntos son medibles:

$$\big\{x\in X\colon\ f(x)<g(x)\big\},\qquad \big\{x\in X\colon\ f(x)>g(x)\big\},\qquad \big\{x\in X\colon\ f(x)=g(x)\big\}.$$

Ahora estudiamos otro método que utiliza el criterio de la medibilidad de funciones reales y la densidad de números racionales.

44. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Demuestre que

$$\big\{x \in X\colon\ f(x) < g(x)\big\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in X\colon\ f(x) < r\} \cap \{x \in X\colon\ g(x) > r\}$$

y deduzca de aquí que el conjunto $\big\{x \in X\colon\ f(x) < g(x)\big\}$ es medible.

45. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Demuestre que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X\colon\ f(x) + g(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in X\colon\ f(x) > r\} \cap \{x \in X\colon\ g(x) > \alpha - r\}.$$

Deduzca de aquí que $f + g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$.

46. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Demuestre que $f^2 \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$.

47. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\lambda f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$.

48. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Verifique las *identidades de polarización*

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right), \qquad fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right).$$

Usando cualesquiera de estas dos identidades y los resultados de ejercicios anteriores muestre que $fg \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$.

49. Suma y producto de dos funciones complejas medibles. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demuestre que $f+g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y $fg \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Funciones simples

50. Sobre una aproximación de la función identidad por una sucesión creciente de funciones escalonadas. Para todo n en $\{1, 2, 3, \ldots\}$ definimos la función $\varphi_n\colon [0, +\infty] \to [0, +\infty)$ de la siguiente manera:

$$\varphi_n(t) \coloneqq \begin{cases} \frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}, & 0 \le t < n; \\ n, & t \ge n. \end{cases}$$

Demuestre las siguientes propiedades de las funciones φ_n.

1. El conjunto de los valores de la función φ_n es $\{k \cdot 2^{-n}\colon\ 0 \le k \le n\}$.

2. Para cada k en $\{0, \dots, n \cdot 2^n - 1\}$,

$$\varphi_n^{-1}[\{k \cdot 2^{-n}\}] = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right).$$

Además,

$$\varphi_n^{-1}[\{n\}] = [n, +\infty].$$

3. La función φ_n es simple y medible.

4. Para todo t en $[0, +\infty]$ y todo n en $\{1, 2, 3, \dots\}$, $\varphi_n(t) \le \varphi_{n+1}(t)$.

5. Para todo t en $[0, +\infty]$,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = t.$$

51. Proposición sobre la aproximación de funciones medibles positivas por funciones simples medibles positivas. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Demuestre que para toda función $\mathcal{F}$-medible positiva $f\colon X \to [0, +\infty]$ existe una sucesión de funciones g_n simples $\mathcal{F}$-medibles positivas tal que en todo punto x en X la sucesión $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es creciente y $g_n(x) \to f(x)$.

52. Sobre una aproximación de la función identidad por una sucesión no creciente de funciones escalonadas. Para cada n en $\mathbb{N}$, definimos $\psi_n\colon [0, +\infty] \to [0, +\infty)$ mediante la regla

$$\psi_n(t) \coloneqq \begin{cases} \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}, & 0 \le t < n; \\ n, & n \le t \le +\infty. \end{cases}$$

Demuestre que para cada t en $[0, +\infty]$,

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = t.$$

Muestre que la sucesión $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es creciente, esto es, encuentre un punto t en $[0, +\infty]$ y un índice n en $\mathbb{N}$ tales que

$$\psi_n(t) > \psi_{n+1}(t).$$