Extensión de medidas

Problemas para examen

Semianillos de conjuntos

1. Escriba la definición de *semianillo de conjuntos*.

2. Convenio: el conjunto vacío pertenece a cualquier semianillo. En los siguientes problemas se supone que la condición $\varnothing \in \mathcal{S}$ está incluida en la definición de semianillo de conjuntos. Algunos autores no la incluyen.

3. Semianillo de los conjuntos unipuntuales de un conjunto. Sea X un conjunto. Denotemos por $\mathcal{S}$ al conjunto que consiste en el conjunto vacío y en todos los subconjuntos unipuntuales de X:

$$\mathcal{S} = \{\varnothing\} \cup \big\{\{x\}\colon\ x \in X\big\}.$$

Demuestre que $\mathcal{S}$ es un semianillo de conjuntos.

4. Fórmulas para la intersección y la diferencia de dos intervalos semiabiertos. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

I. Encuentre una fórmula general para $[a, b) \cap [c, d)$. Sugerencia: usar max y min.

II. Suponiendo que $c < d$ represente $\mathbb{R} \setminus [c, d)$ como una unión de dos intervalos.

III. Suponiendo que $c < d$ encuentre una fórmula para $[a, b) \setminus [c, d)$.

Recordamos que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ el conjunto $[a, b)$ se define como

$$\{x \in \mathbb{R}\colon\ (a \le x) \wedge (x < b)\}.$$

5. Semianillo de los intervalos semiabiertos del eje real. Muestre que los intervalos $[a, b)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, forman un semianillo sobre $\mathbb{R}$. Sugerencia: use las fórmulas del problema anterior.

6. Teorema (el producto de dos semianillos es un semianillo). Sean X, Y algunos conjuntos, $\mathcal{S}_1$ un semanillo sobre X y $\mathcal{S}_2$ un semianillo sobre Y. Definimos

$$\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 := \big\{A \times B\colon \quad A \in \mathcal{S}_1, \quad B \in \mathcal{S}_2\big\}$$

Muestre que $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ es un semianillo sobre $X \times Y$.

7. Intersección de dos semianillos no necesariamente es semianillo. Construya dos semianillos $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ sobre un conjunto X tales que su intersección $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ no sea semianillo. Indicación: puede construir $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ sobre un conjunto de tres elementos: $X = \{0, 1, 2\}$.

Anillos de conjuntos

8. Demuestre que la operación $\triangle$ es asociativa y conmutativa. ¿Cuál es el conjunto neutro para esta operación? Dado un conjunto A, encuentre un conjunto B tal que $A \triangle B = \varnothing$s.

9. Demuestre que la operación $\cap$ es asociativa y conmutativa.

10. Demuestre la ley distributiva entre $\triangle$ y $\cap$:

$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C).$$

11. Definición del anillo de conjuntos a través de $\triangle$ y $\cap$. Escriba la definición de *anillo de conjuntos* en términos de las operaciones $\triangle$ y $\cap$. Notemos que en la definición de un anillo de conjuntos no se trata de dos operaciones binarias arbitrarias, como en álgebra moderna. Se trata de dos operaciones muy específicas. Notemos que las operaciones $\triangle$ y $\cap$ tienen propiedades buenas, y no hay necesidad de pedir estas propiedades en la definición del anillo de conjuntos. Por lo tanto, en la definición del anillo de conjuntos se pide solamente que la colección sea cerrada bajo $\triangle$ y $\cap$, y que el conjunto vacío sea un elemento de la colección.

12. Escriba la definición de *álgebra de conjuntos* sobre un conjunto X.

13. Conjunto-potencia es un álgebra de conjuntos. Demuestre que 2^X es un álgebra de conjuntos sobre X.

14. Exprese algunas operaciones con conjuntos a través de otras:

- $\triangle$ en términos de $\cup$ y $\setminus$.
- $\cap$ en términos de $\setminus$.
- $\setminus$ en términos de $\triangle$.
- $\cup$ en términos de $\triangle$ y $\cap$.

15. Sea $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ tal que $\varnothing \in \mathcal{A}$. Demuestre que $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos si, y solo si, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo $\cup$ y $\setminus$.

16. Colecciones de conjuntos, cerradas bajo algunas operaciones y no cerradas bajo otras. Construir un conjunto X y una colección $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ con las siguientes propiedades:

(a) $\varnothing \in \mathcal{A}$,

(b) $\mathcal{A}$ es cerrada bajo $\cup$,

(c) $\mathcal{A}$ es cerrada bajo $\triangle$,

(d) $\mathcal{A}$ no es cerrada bajo $\setminus$.

Este ejemplo muestra que las condiciones (a), (b), (c) no definen un anillo de conjuntos.

17. Colecciones de conjuntos, cerradas bajo algunas operaciones y no cerradas bajo otras. Construir un conjunto X y una colección $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ con las siguientes propiedades:

(a) $\varnothing \in \mathcal{A}$,

(b) $\mathcal{A}$ es cerrada bajo $\cap$,

(c) $\mathcal{A}$ es cerrada bajo $\setminus$,

(d) $\mathcal{A}$ no es cerrada bajo $\cup$.

Este ejemplo muestra que las condiciones (a), (b), (c) no definen un anillo de conjuntos.

18. Cualquier anillo de conjuntos es un semianillo de conjuntos. Sea $\mathcal{A}$ un anillo sobre un conjunto X. Demuestre que $\mathcal{A}$ es un semianillo sobre X.

19. Intersección de anillos es un anillo. Sea $\mathfrak{A}$ un conjunto de anillos sobre un conjunto X. Demuestre que el conjunto

$$\mathcal{B} := \big\{ Y \subseteq X\colon \quad \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{A} \quad Y \in \mathcal{A} \big\}$$

es un anillo sobre X.

20. Anillo generado por un conjunto. Sean X un conjunto y $\mathcal{C} \subseteq 2^X$. Escriba la definición del *anillo generado* por $\mathcal{C}$.

21. Teorema (descripción del anillo generado por un semianillo). Sea $\mathcal{S}$ un semianillo sobre un conjunto X. Denotemos por $\mathcal{A}$ al conjunto de todas las uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{A} := \left\{ A \subseteq X\colon \quad \exists m \in \{1, 2, \ldots\} \quad \exists P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{S} \quad \text{disjuntos}, \quad A = \bigcup_{i=1}^{m} P_i \right\}.$$

Demuestre que $\mathcal{A}$ es el anillo generado por $\mathcal{S}$.

22. Anillo generado por los subconjuntos unipuntuales de un conjunto. Sea X un conjunto. Denotemos por $\mathcal{S}$ al conjunto que consiste en el conjunto vacío y en todos los subconjuntos unipuntuales de X:

$$\mathcal{S} = \{\varnothing\} \cup \big\{ \{x\}\colon \ x \in X \big\}.$$

Se sabe que $\mathcal{S}$ es un semianillo. Describa el anillo generado por $\mathcal{S}$.

Premedidas

23. Escriba la definición de *premedida*.

24. Toda premedida es finitamente aditiva. Demuestre que toda premedida cumple con la propiedad finitamente aditiva.

En los siguientes cuatro problemas denotamos por $\mathcal{S}$ al conjunto de los intervalos semiabiertos (de la forma $[a, b)$ con $a \le b$) y por μ a la longitud: $\mu([a, b)) = b - a$. Vamos a demostrar que μ es una premedida sobre $\mathcal{S}$.

25. Lema. Sean $P_1, \ldots, P_n, Q \in \mathcal{S}$ tales que $P_1, \ldots, P_n$ son disjuntos a pares y $P_k \subseteq Q$ para cada k. Demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) \le \mu(Q).$$

26. Lema. Sean $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $c < d$, y sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito de intervalos abiertos acotados en $\mathbb{R}$ tal que

$$[c, d] \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Demuestre que

$$d - c < \sum_{A \in \mathcal{A}} (\sup(A) - \inf(A)).$$

Sugerencia: utilice el teorema de Heine–Borel de la compacidad de intervalos cerrados acotados en $\mathbb{R}$.

27. Lema. Sea $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{S}$ y sea Q un elemento de $\mathcal{S}$ tales que

$$Q \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k.$$

Entonces

$$\mu(Q) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

28. Teorema. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de los intervalos semiabiertos del eje real:

$$\mathcal{S} := \big\{ [a, b) \colon \quad a, b \in \mathbb{R},\ a \le b \big\}.$$

Definimos la función $\mu \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ mediante la regla $\mu([a, b)) = b - a$, para cualesquier $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \le b$. Demuestre que μ es una premedida usando los tres lemas anteriores.

29. Teorema de la extensión de una premedida de un semianillo al anillo generado. Enuncie el teorema. La demostración se divide en las siguientes partes:

- Unicidad.
- Definición de la premedida $\overline{\mu}$ en el anillo y justificación de la definición.
- Verificación de los axiomas de premedida para la función $\overline{\mu}$.

Clases monótonas de conjuntos

30. Escriba la definición de *clase monótona de conjuntos.*

Los siguientes ejercicios de clases monótonas no se incluyen en el examen.

31. Demuestre que la intersección de un conjunto de clases monótonas es una clase monótona.

32. Teorema. Sea $\mathcal{S}$ un anillo de conjuntos. Demuestre que la clase monótona $\mathcal{M}$ generada por $\mathcal{S}$ es un σ-anillo de conjuntos. En particular, si $\mathcal{S}$ es una álgebra de conjuntos sobre X, entonces $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra sobre X.

33. Corolario (descripción del $\boldsymbol{\sigma}$-anillo generado a través de la clase monótona generada). Sea $\mathcal{S}$ un semianillo de conjuntos sobre X. Denotemos por $\mathcal{A}$ al anillo generado por $\mathcal{S}$ y por $\mathcal{M}$ a la clase monótona generada por $\mathcal{A}$. Demuestre que $\mathcal{M}$ es el σ-anillo generado por $\mathcal{S}$. En particular, si $\mathcal{S}$ es una semiálgebra sobre X, entonces $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra sobre X.

Medidas exteriores

34. Escribir la definición de *medida exterior* sobre un conjunto X.

35. Ejemplo. Sea X un conjunto. Definimos $\varphi\colon 2^X \to [0,+\infty]$ mediante las siguientes reglas:

- $\varphi(\varnothing) = 0$.
- $\varphi(A) = 1$, si A es un subconjunto unipuntual de X.
- $\varphi(A) = \sqrt{3}$, si $A \subseteq X$ y A tiene por lo menos dos elementos diferentes.

Demostrar que φ es una medida exterior sobre X.

36. Sea $X = \{1, 2\}$. Construir una medida exterior $\varphi\colon 2^X \to [0,+\infty]$ que no sea medida.

37. Demostrar que toda medida exterior es finitamente subaditiva.

38. Criterio de medida exterior. Muestre que dos condiciones en la definición de medida exterior se pueden sustituir por una sola condición.

39. Teorema de la medida exterior generada por una premedida. Sean $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos sobre X y $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ una premedida.

- Escriba la definición de la medida exterior $\mu^*\colon 2^X \to [0,+\infty]$ generada por μ.
- Demuestre que efectivamente μ^* es una medida exterior.
- Demuestre que $\mu^*(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Construcción de Carathéodory: $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra y medida asociadas a una medida exterior

En los siguientes problemas se supone que $\varphi\colon 2^X \to [0,+\infty]$ es una medida exterior.

40. Escriba la definición de conjunto φ-medible (o Carathéodory φ-medible).

Vamos a denotar el conjunto de los conjuntos φ-medibles por $\mathcal{C}_\varphi$.

41. Escriba la definición de medida completa.

42. Teorema de la $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra y medida asociadas a una medida exterior. Enuncie el teorema sobre $\mathcal{C}_\varphi$ y la restricción de φ a $\mathcal{C}_\varphi$.

43. Demuestre que $\mathcal{C}_\varphi$ es una álgebra de conjuntos sobre X.

44. Sean $A, B \in \mathcal{C}_\varphi$ disjuntos y $P \subseteq X$. Demuestre que

$$\varphi(P \cap (A \cup B)) = \varphi(P \cap A) + \varphi(P \cap B).$$

45. Sean $m \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{C}_\varphi$ mutualmente disjuntos y $P \subseteq X$. Demuestre que

$$\varphi\left(P \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{m} \varphi(P \cap A_j).$$

46. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión disjunta en $\mathcal{C}_\varphi$ y sea

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Demuestre que $B \in \mathcal{C}_\varphi$ y

$$\varphi(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(A_n).$$

47. Sean X un conjunto y $\mathcal{A}$ una álgebra de conjuntos sobre X cerrada bajo uniones numerables disjuntas. Demuestre que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra sobre X.

De los lemas anteriores sigue que $\mathcal{C}_\varphi$ es una σ-álgebra y la restricción ν de φ a $\mathcal{C}_\varphi$ es una medida.

48. Demuestre que $\quad \bigl\{A \subseteq X\colon\ \varphi(A) = 0\bigr\} \subset \mathcal{C}_\varphi \quad$ y que ν es completa.

49. Teorema de Carathéodory de extensión de una premedida definida en un anillo a la $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra generada por este anillo. Enuncie y demuestre el teorema.

Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y sus propiedades

En esta sección denotamos por τ a la topología en $\mathbb{R}$. Sea $\mathcal{S}$ el semianillo de intervalos semiabiertos, definido en el Problema 5, y sea $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ la premedida en $\mathcal{S}$ definida como la longitud de intervalos. Denotamos por λ^* la medida exterior inducida por λ. Definimos la σ-álgebra de Lebesgue $\mathcal{F}$ como la colección de Carathéodory $\mathcal{C}_{\lambda^*}$ asociada a λ^*. Definimos la medida de Lebesgue μ como la restricción $\lambda^*|_{\mathcal{F}}$.

50. Explicar de manera más detallada cómo se define la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ usando la construcción de Carathéodory.

51. Demostrar que si $A \in \tau_{\mathbb{R}}$ y $A \neq \varnothing$, entonces $\mu(A) > 0$.

52. Regularidad por arriba de la medida de Lebesgue. Sea $Y \in \mathcal{F}$. Demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $A \in \tau$ tal que $Y \subseteq A$ y

$$\mu(A) < \mu(Y) + \varepsilon.$$

Como consecuencia,

$$\mu(Y) = \inf\bigl\{\mu(A)\colon \quad A \in \tau, \quad Y \subseteq A\bigr\}.$$

53. Es una versión más precisa del Problema 52. Sea $Y \in \mathcal{F}$. Demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $A \in \tau$ tal que $Y \subseteq A$ y

$$\mu(A \setminus Y) < \varepsilon.$$

54. Regularidad por abajo de la medida de Lebesgue. Sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(Y) < +\infty$. Demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto $C \subseteq Y$ tal que $\mu(Y \setminus C) < \varepsilon$.

55. Invarianza bajo traslaciones de la medida de Lebesgue. Demuestre que para cualquier conjunto Lebesgue-medible $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ y cualquier número $b \in \mathbb{R}^n$

$$\mu(Y + b) = \mu(A).$$

Existencia de un conjunto no Lebesgue-medible

56. Una variación del ejemplo de Vitali. Explicar brevemente la definición del conjunto $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Usando el axioma de elección, elegimos un conjunto $W \subseteq \mathbb{R}$ tal que para cada $C \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ la intersección $W \cap C$ es un conjunto unipuntual.

I. Demostrar que W es no numerable.

II. Demostrar que la colección $W + \mathbb{Q}$, esto es, $\{W + q\colon\ q \in \mathbb{Q}\}$ es una partición del conjunto $\mathbb{R}$.

III. Demostrar que si $W \in \mathcal{F}$, entonces $\mu(W) = +\infty$. Aquí $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra de Lebesgue y μ es la medida de Lebesgue. Se puede usar el hecho que μ es invariante bajo traslaciones.

Observación. En realidad, $W \notin \mathcal{F}$, pero es difícil demostrarlo, y en este problema no se propone hacerlo. En la solución del problema no está permitido usar las propiedades del conjunto de Vitali; la idea es trabajar directamente con el conjunto W de manera similar.

57. Ejemplo de Vitali. Estudiar el ejemplo de Vitali de conjunto no Lebesgue-medible.

Aproximación de funciones medibles por funciones continuas (tareas adicionales, no se incluyen en el examen)

58. Teorema de Luzin. Denotemos por $\mathcal{F}$ a la σ-álgebra de Lebesgue en el intervalo $[\alpha, \beta]$, donde $\alpha < \beta$, y por μ a la medida de Lebesgue restringida a este intervalo. Sea $f \in \mathcal{M}([\alpha, \beta], \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ y sea $\eta > 0$. Demuestre que existe un conjunto cerrado $K \subset [\alpha, \beta]$ tal que $f|_Y$ es continua y $\mu([\alpha, \beta] \setminus K) < \eta$.

59. Denotemos por $\mathcal{F}$ a la σ-álgebra de Lebesgue en el intervalo $[\alpha, \beta]$, donde $\alpha < \beta$, y por μ a la medida de Lebesgue restringida a este intervalo. Sea $f \in \mathcal{M}([\alpha, \beta], \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ y sea $\eta > 0$. Demuestre que existe una función continua $g \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C})$ tal que

$$\sup_{x \in [\alpha, \beta]} |g(x)| \le \|f\|_\infty \qquad \text{y} \qquad \mu(\{x \in X\colon\ f(x) \ne g(x)\}) < \eta.$$

Otras tareas adicionales

60. Encontrar un ejemplo de conjunto Lebesgue-medible, pero no Borel-medible. En otras palabras, hay que encontrar $Y \subseteq \mathbb{R}$ tal que $Y \in \mathcal{F}$, pero $Y \notin \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.