Integración sobre productos de espacios

Problemas para examen

La lista todavía no es completa.

Álgebra y σ-álgebra generada por una semiálgebra

1. Escriba las definiciones de semianillo y semiálgebra de conjuntos.

2. Escriba las definiciones de anillo y álgebra de conjuntos.

3. Descripción del álgebra generada por una semiálgebra. Sea $\mathcal{S} \subset 2^X$ una semiálgebra sobre X. Denotemos $\mathcal{E}$ al conjunto de todos los subconjuntos de X que se pueden representar como uniones finitas disjuntas de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{S}$. Demuestre que $\mathcal{E}$ es una álgebra de conjuntos. Demuestre que $\mathcal{E}$ es el álgebra mínima que contiene a $\mathcal{S}$.

4. Escriba la definición de clase monótona.

5. Descripción de la σ-álgebra generada por una semiálgebra. Sea $\mathcal{S} \subset 2^X$ una semiálgebra sobre X, sea $\mathcal{E}$ el álgebra generada por $\mathcal{S}$ y sea $\mathfrak{M}$ la clase monótona mínima que contiene a $\mathcal{E}$. Demuestre que $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra. De aquí se sigue que $\mathfrak{M}$ es la σ-álgebra mínima que contiene a $\mathcal{S}$.

Producto de σ-álgebras

6. Proposición (producto de semianillos). Sea $\mathcal{F}$ un semianillo sobre X y sea $\mathcal{G}$ un semianillo sobre Y. Entonces la siguiente colección de conjuntos es un semianillo:

$$\mathcal{S} \coloneqq \{A \times B\colon \quad A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}\}.$$

En particular, si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son semiálgebras, entonces $\mathcal{S}$ también es una semiálgebra.

7. Corolario: los "rectángulos medibles" forman una semiálgebra. Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{G})$ espacios medibles. Sea

$$\mathcal{S} \coloneqq \Big\{A \times B\colon \quad A \in \mathcal{F}, \quad B \in \mathcal{G}\Big\}.$$

Entonces $\mathcal{S}$ es una semiálgebra sobre $X \times Y$. Notemos que $\mathcal{S}$ no necesariamente es σ-álgebra.

8. Notación (producto de σ-álgebras). Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{G})$ espacios medibles. Denotamos por $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ la σ-álgebra generada por el semianillo

$$\{A \times B\colon \quad A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}\}.$$

Como corolarios de lo anterior se obtienen las siguientes afirmaciones.

9. Conjuntos elementales forman un álgebra de conjuntos. Sean $(X,\mathcal{F})$, $(Y,\mathcal{G})$ espacios medibles, y sea

$$\mathcal{S} \coloneqq \{A \times B\colon \quad A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}\}.$$

Denotemos por $\mathcal{E}$ a la colección de todos los subconjuntos de $X \times Y$ que se pueden representar como uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{S}$. Entonces $\mathcal{E}$ es el álgebra de conjuntos generada por la semiálgebra $\mathcal{S}$.

10. El producto de $\boldsymbol{\sigma}$-álgebras es la clase monótona más pequeña que contiene a todos los conjuntos elementales. Sean $(X,\mathcal{F})$, $(Y,\mathcal{G})$ espacios medibles. Definimos $\mathcal{S}$ y $\mathcal{E}$ como en el problema anterior. Entonces $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ es la clase monótona más pequeña que contiene a $\mathcal{E}$.

11. Notación (secciones de conjuntos). Sea $C \subset X \times Y$. Para todo x en X pongamos

$$C_x \coloneqq \{y \in Y\colon\ (x,y) \in C\},$$

y para todo y en Y pongamos

$$C^y \coloneqq \{x \in X\colon\ (x,y) \in C\}.$$

12. Secciones de conjuntos como preimágenes. Sean X, Y algunos conjuntos y sea $x \in X$. Sea $J_x\colon Y \to X \times Y$ la siguiente función:

$$\forall y \in Y \qquad J_x(y) \coloneqq (x,y).$$

Muestre que para todo $C \subset X \times Y$,

$$C_x = J_x^{-1}[C].$$

13. Secciones de conjuntos en términos de proyecciones. Sea X, Y algunos conjuntos. Definimos $\pi_1\colon X \times Y \to X$ y $\pi_2\colon X \times Y \to Y$ de la siguiente manera:

$$\pi_1(x,y) \coloneqq x, \qquad \pi_2(x,y) \coloneqq y.$$

Dados $E \subset X \times Y$, $a \in X$, $b \in Y$, exprese E_a y E^b en términos de π_1, π_2, E, a, b.

14. Las secciones de conjuntos medibles son medibles. Sean $(X,\mathcal{F})$, $(Y,\mathcal{G})$ espacios medibles.

- Sea $a \in X$. Muestre que para cada C en $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, $C_a \in \mathcal{G}$. Sugerencia: considere la colección de conjuntos
$$\Omega \coloneqq \{C \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}\colon\ C_a \in \mathcal{G}\},$$
muestre que $\mathcal{S} \subset \Omega$ y Ω es una σ-álgebra. Concluya que $\Omega = \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.

- Sea $b \in Y$. Muestre que para cada C en $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, $C^b \in \mathcal{F}$.

15. Secciones de una función medible son medibles. Sea $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathbb{C})$ y sea $y \in Y$. Definamos $f^y\colon X \to \mathbb{C}$ mediante la fórmula

$$f^y(x) \coloneqq f(x,y).$$

Demuestre que $f^y \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Producto de medidas

La siguiente afirmación se cumple para el caso de medidas σ-finitas, pero en el examen es suficiente demostrarla en el caso de medidas finitas.

16. Teorema sobre el producto de medidas. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, donde μ y ν son medidas σ-finitas. Para todo $C \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ definamos las funciones $\varphi_C \colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\psi_C \colon Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mediante las siguientes reglas:

$$\forall x \in X \quad \varphi_C(x) \coloneqq \nu(C_x), \qquad\qquad \forall y \in Y \quad \psi_C(y) \coloneqq \mu(C^y).$$

Demuestre que para todo C en $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $\varphi_C \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$.
2. $\psi_C \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, \overline{\mathbb{R}}_+)$.
3. $\displaystyle\int\limits_X \varphi_C \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_Y \psi_C \, \mathrm{d}\nu$.

Sugerencia: considerar la colección Ω de todos los subconjuntos C de $X \times Y$, para los cuales se cumplen las tres afirmaciones anteriores; demostrar que Ω contiene a la semiálgebra $\mathcal{S}$ de los rectángulos medibles y que Ω es una σ-álgebra.

17. Definición del producto de medidas. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, donde μ y ν son medidas σ-finitas. Escriba la definición de la medida $\mu \times \nu$.

18. Contraejemplo. Construya algunos espacios de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ y algún conjunto $C \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tales que

$$\int\limits_X \varphi_C \, \mathrm{d}\mu \neq \int\limits_Y \psi_C \, \mathrm{d}\nu.$$

Teoremas de Tonelli y Fubini

19. Teorema de Tonelli. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, donde μ y ν son medidas σ-finitas. Para toda función f en $\mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ definamos las funciones $\varphi_f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ y $\psi_f \colon Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$ de la siguiente manera:

$$\forall x \in X \qquad \varphi_f(x) \coloneqq \int\limits_Y f_x \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y),$$

$$\forall y \in Y \qquad \psi_f(y) \coloneqq \int\limits_X f^y \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_X f(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Demuestre que para toda f en $\mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \times \nu)$

$$\int\limits_X \varphi_f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{X \times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int\limits_Y \psi_f \, \mathrm{d}\nu.$$

20. Teorema de Fubini. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, donde μ y ν son medidas σ-finitas. Sea $f \in L^1(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mu \times \nu, \mathbb{R})$. Demuestre que $f_x \in L^1(Y, \mathcal{G}, \nu, \mathbb{R})$ para casi todos $x \in X$ y se cumple la fórmula:

$$\int\limits_{X \times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x).$$

El teorema de Fubini también se cumple para funciones complejas.

21. Contraejemplos. Consideremos el intervalo $X = Y = (0, 1)$ con la medida de Lebesgue μ. Dé un ejemplo de una función $f \in \mathcal{M}(X \times X, \mu \times \mu, \mathbb{R})$ tal que

$$\int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \neq \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y).$$

22. Muestre con ejemplos que las hipótesis del teorema de Fubini no se pueden omitir.

Ejemplos de aplicaciones del teorema de Fubini

23. Use el teorema de Fubini y la fórmula

$$\frac{1}{x} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xt} \, \mathrm{d}t$$

para demostrar que

$$\lim_{A \to +\infty} \int\limits_0^A \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$