Funciones definidas por integrales

Problemas para examen

El examen puede incluir tanto teoremas con demostraciones (escritos en los apuntes) como aplicaciones de los teoremas. Actualmente en este archivo se muestran varios ejemplos de aplicaciones de los teoremas. Esta lista de problemas no es completa. Otros problemas se mencionan en los apuntes.

1. Continuidad de la integral de Dirichlet con la función exponencial. Demostrar que la integral impropia

$$\int_0^{\to+\infty} e^{-\lambda x}\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x$$

converge uniformemente en $[0, +\infty)$, y la función

$$\Phi(\lambda) := \int_0^{\to+\infty} e^{-\lambda x}\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x$$

es continua en $[0, +\infty)$.

2. Cálculo de la integral de Dirichlet a través de la derivación respecto al parámetro. Demostrar que para todo $\lambda \geq 0$

$$\boxed{\int_0^{\to+\infty} e^{-\lambda x}\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \lambda.}$$

Indicación. Considerar la función

$$\Phi(\lambda) := \int_0^{\to+\infty} e^{-\lambda x}\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

calcular su derivada, luego calcular $\Phi(\lambda)$.

3. Integrales de Fresnel. Demostrar las fórmulas:

$$\boxed{\int_0^{\to+\infty} \cos x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},} \qquad \boxed{\int_0^{\to+\infty} \operatorname{sen} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.}$$

Indicación. Hacer el cambio de variable $t = x^2$, aplicar la fórmula

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\,\mathrm{d}u,$$

invertir el orden de las integraciones.

4. Fórmula de los complementos para la función Γ. Demostrar que para todo $x \in (0,1)$

$$\boxed{\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}.}$$

Indicación. Demostrar al principio que

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{1+y}\,\mathrm{d}y.$$

Para $x \in (0,1)$ fijo, considerar la función

$$f(\lambda) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{e^{i\lambda}\,y+1}\,\mathrm{d}y \qquad (\lambda \in (-\pi,\pi)).$$

Demostrar que $f'(\lambda) = -ixf(\lambda)$. De aquí $f(\lambda) = g(x)e^{-i\lambda x}$, donde $\gamma(x)$ depende solamente de x. Mostrar que para $\lambda \in (0,\pi)$

$$g(x)\operatorname{sen}(\lambda x) = \frac{f(-\lambda)-f(\lambda)}{2i} = \operatorname{sen}\lambda \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^x\,dy}{y^2+2y\cos\lambda+1} = \int\limits_{\cot\lambda}^{+\infty} \frac{(u\operatorname{sen}\lambda-\cos\lambda)^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Pasando al límite para $\lambda \to \pi$, probar que $g(x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}$.

5. Continuidad y derivadas parciales del potencial volúmico. Sea K un compacto en $\mathbb{R}^3$, $\rho\colon K \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Mostrar que la función

$$U(a) := \int\limits_K \frac{\rho(x)\,\mathrm{d}x}{|x-a|}$$

es continua en $\mathbb{R}^3 \setminus K$ y calcular sus derivadas parciales.

Indicación. Escribir U en forma

$$U(a) = V_r(a) + W_r(a) \quad \text{con} \quad V_r(a) = \int\limits_{|x-a|\le r} \frac{\rho(x)\,dx}{|x-a|}, \quad W_r(a) = \int\limits_{|x-a|>r} \frac{\rho(x)\,dx}{|x-a|}.$$

Obtener una mayoración $|V_r(a)| < kr^2$ con k constante y probar de allí que $W_{1/\nu}(a) \overset{a\in\mathbb{R}^3\Rightarrow}{U}$ (a) cuando $\nu \to \infty$.

Para demostrar que $\partial_1 U(a) = U_1(a) := \int_K \rho(x)\frac{x_1-a_1}{|x-a|^3}\,\mathrm{d}x$, probar la fórmula

$$\int\limits_{b_1}^{c_1} U_1(a_1,a_2,a_3)\,da_1 = U(c_1,a_2,a_3) - U(b_1,a_2,a_3).$$

6. Regla de Leibniz con límites variables. Sean I y J intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$ una función continua. Se supone que para todo $(x, y) \in I \times J$ existe la derivada parcial $\partial_2 f(x, y)$ y que existe $g \in \mathcal{L}^1(I)$ tal que $|\partial_2 f(x, y)| \le g(x)$ para todo $(x, y) \in I \times J$. Sean φ y ψ funciones derivables $J \to I$. Se define para todo $y \in J$:

$$\Phi(y) := \int\limits_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Probar que Φ es derivable y

$$\boxed{\Phi'(y) = \int\limits_{\psi(y)}^{\varphi(y)} \partial_2 f(x, y)\,\mathrm{d}x + \varphi'(y) f(\varphi(y), y) - \psi'(y) f(\psi(y), y).}$$

Indicación. Para un y fijo en J, escribir $\Phi(y + h)$ en forma

$$\Phi(y + h) = \int\limits_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\varphi(y)}^{\varphi(y+h)} f(x, y)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{\psi(y)}^{\psi(y+h)} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

7. Cálculo de la integral de Poisson. Demostrar que

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.}$$

Indicación. Considerar las funciones

$$I(L) := \int\limits_{-L}^{L} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad g(R) := \int\limits_{x^2+y^2 \le R^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

calcular $g(R)$ usando coordenadas polares, y mostrar que $g(L) \le I(L)^2 \le g(L\sqrt{2})$.

8. Cálculo de la integral de Poisson con otro método. Para todo x en $\mathbb{R}$ se definen

$$f(x) := \left(\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt \right)^2, \qquad g(x) := \int\limits_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Demuestre que para cada x en $\mathbb{R}$ se cumple la igualdad $f'(x) + g'(x) = 0$ y deduzca que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$. Utilice este resultado para calcular la integral de Poisson:

$$\boxed{\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$