Espacios con producto interno

Problemas para examen

En todos los ejercicios de esta lista, si no está escrita otra suposición, suponemos que H es un espacio vectorial complejo con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En la definición del producto interno pedimos la propiedad lineal respecto al primer argumento y la propiedad lineal conjugada respecto al segundo argumento.

Hablando de *subespacios vectoriales*, usamos esta palabra en el sentido puramente algebraico (el subespacio no necesariamente es cerrado).

En esta unidad del curso nos concentramos a las propiedades “finitas”; en el futuro estudiaremos espacios de Hilbert (espacios vectoriales con producto interno, completos respecto a la distancia inducida por el producto interno).

Propiedades elementales de formas sesquilineales

En esta sublista de ejercicios suponemos que V es un espacio vectorial complejo y f es una forma sesquilineal en V, esto es, $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$, la función f es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo argumento.

1 Ejercicio. Demostrar que que para cada m en $\mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, \ldots, a_m$ en V, cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ en $\mathbb{C}$ y cualquier b en V,

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, b\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(a_j, b).$$

Sugerencia: usar la inducción matemática sobre m.

2 Ejercicio. Demostrar que para cada n en $\mathbb{N}$, cada a en V, cualesquiera $b_1, \ldots, b_n$ en $\mathbb{N}$ y cualesquiera $\mu_1, \ldots, \mu_n$ en V,

$$f\left(a, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mu_k} f(a, b_k).$$

3 Ejercicio. Demostrar que para cada m, n en $\mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ en V y cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n$ en $\mathbb{C}$,

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \overline{\mu_k} f(a_j, b_k).$$

4 Ejercicio. Sea $A \subseteq V$. Demostrar que el siguiente conjunto es un subespacio vectorial de H:

$$\{b \in V\colon\ \forall a \in A\ f(a,b) = 0\}.$$

5 Ejercicio. Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in V$, $S = \ell(a_1, \ldots, a_m)$. Demostrar que

$$\{b \in V\colon \quad \forall s \in S \quad f(s,b) = 0\} = \big\{b \in V\colon \quad \forall k \in \{1, \ldots, m\} \quad f(a_k, b) = 0\big\}.$$

6 Ejercicio (la identidad de paralelogramo para las formas sesquilineales)**.** Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Denotemos por q a la *forma cuadrática* asociada a f:

$$q\colon V \to \mathbb{C}, \qquad q(x) \coloneqq f(x,x) \qquad (x \in V).$$

Demostrar que

$$q(a+b) + q(a-b) = 2(q(a) + q(b)).$$

7 Ejercicio (la propiedad homogénea absoluta de orden 2 para las formas cuadráticas)**.** Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Denotemos por q a la *forma cuadrática* asociada a f. Demostrar que para cada a en V y cada λ en $\mathbb{C}$

$$q(\lambda a) = |\lambda|^2 q(a).$$

8 Ejercicio (la identidad de polarización para las formas sesquilineales)**.** Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Denotemos por q a la forma cuadrática asociada a f. Sean $a, b \in V$. Demostrar que

$$f(a,b) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q(a + \mathrm{i}^k\, b).$$

Sugerencia. Primero verificar que

$$\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k = 0, \qquad \sum_{k=0}^{3} (-1)^k = 0.$$

9 Ejercicio (la identidad de polarización con m sumandos para las formas sesquilineales)**.** Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Denotemos por q a la forma cuadrática asociada a f. Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$. Pongamos

$$\varepsilon_m \coloneqq \mathrm{e}^{\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{n}}.$$

Sean $a, b \in V$. Demostrar que

$$f(a,b) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_m^k q(a + \varepsilon_m^k b).$$

Sugerencia. Primero demostrar que

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon_m^{pk} = \begin{cases} 1, & p = 0; \\ 0, & p \in \{1,\ldots,m-1\}. \end{cases}$$

Propiedades elementales del producto interno

10 Ejercicio. Escribir la definición del producto interno y la definición del preproducto interno.

11 Ejercicio. Demostrar que si $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H^2 \to \mathbb{C}$ es una función lineal respecto al primer argumento y hermítica (es decir, $\langle b, a\rangle = \overline{\langle a, b\rangle}$ para todo a, b en H), entonces esta función es lineal conjugada respecto al segundo argumento.

12 Ejercicio. Demostrar que para cada m en $\mathbb{N}$, cualesquiera $a_1,\ldots,a_m$ en H, cualesquiera $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ en $\mathbb{C}$ y cualquier b en H,

$$\left\langle \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, b \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle a_j, b\rangle.$$

Sugerencia: usar la inducción matemática o aplicar el resultado del Ejercicio 1.

13 Ejercicio. Demostrar que para cada n en $\mathbb{N}$, cualquier a en H, cualesquiera $b_1,\ldots,b_n$ en $\mathbb{N}$ y cualesquiera $\mu_1,\ldots,\mu_n$ en H,

$$\left\langle a, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mu_k}\langle a, b_k\rangle.$$

14 Ejercicio. Demostrar que para cada m, n en $\mathbb{N}$, cualesquiera $a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n$ en H y cualesquiera $\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\mu_1,\ldots,\mu_n$ en $\mathbb{C}$,

$$\left\langle \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \lambda_j \overline{\mu_k}\langle a_j, b_k\rangle.$$

15 Definición. Sean $a, b \in H$. Decimos que a y b son *ortogonales* y escribimos $a \perp b$ si $\langle a, b\rangle = 0$.

16 Ejercicio. Demostrar que la relación binaria $\perp$ es simétrica.

17 Ejercicio. Demostrar que si $a \perp a$, entonces $a = 0_H$.

18 Ejercicio. Sea $A \subseteq H$. Escribir la definición del conjunto $A^\perp$.

19 Ejercicio. Sea $A \subseteq H$. Demostrar que $A^\perp$ es un subespacio de H.

20 Ejercicio. Sea $A \subseteq H$. Demostrar que $A \cap A^\perp \subseteq \{0_H\}$.

21 Ejercicio. Demostrar que $H^\perp = \{0_H\}$ y que $\{0_H\}^\perp = H$.

22 Ejercicio. Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in H$, $S = \ell(a_1, \ldots, a_m)$. Demostrar que $S^\perp = \{a_1, \ldots, a_m\}^\perp$.

23 Ejercicio. Sea $A \subseteq H$ y sea $S \coloneqq \ell(A)$. Demostrar que $S^\perp = A^\perp$.

24 Ejercicio. Sean $Y, Z \subseteq H$ tales que $0_H \in Y$ y $0_H \in Z$. Demostrar que

$$(Y + Z)^\perp = Y^\perp \cap Z^\perp.$$

El teorema de Pitágoras en los espacios con producto interno

25 Ejercicio. Sea $z \in \mathbb{C}$. Simplificar la expresión $z + \overline{z}$.

26 Ejercicio. Sean $a, b \in H$. Simplificar la expresión

$$\langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle.$$

27 Ejercicio. Sean $a, b \in H$. Demostrar que

$$\langle a + b, a + b\rangle = \langle a, a\rangle + 2\operatorname{Re}(\langle a, b\rangle) + \langle b, b\rangle.$$

28 Ejercicio (el teorema de Pitágoras para la suma de dos vectores ortogonales en un espacio con producto interno)**.** Sean $a, b \in H$ tales que $a \perp b$. Demostrar que

$$\langle a + b, a + b\rangle = \langle a, a\rangle + \langle b, b\rangle.$$

29 Ejercicio (la longitud del cateto es menor o igual que la longitud de la hipotenusa). Sean $a, b \in H$ tales que $a \perp b$. Demuestre que

$$\langle a+b, a+b\rangle \geq \langle a, a\rangle.$$

30 Ejercicio (el caso cuando el cateto es igual a la hipotenusa). Sean $a, b \in H$ tales que $a \perp b$ y

$$\langle a+b, a+b\rangle = \langle a, a\rangle.$$

Mostrar que $b = 0_H$.

La proyección ortogonal de un vector sobre el subespacio generado por un vector no nulo

31 Ejercicio. Sean $v \in H$ y $a \in H \setminus \{0_H\}$. Pongamos $S = \ell(a)$. Demostrar que existe un único vector u en S tal que $v - u \in S^\perp$. Expresar u en términos de a y v.

32 Ejercicio. Sean $v \in H$ y $a \in H \setminus \{0_H\}$. Pongamos $S = \ell(a)$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $v \in S$;

(b) $v = \dfrac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle} a$;

(c) $\langle v, v\rangle = \dfrac{|\langle v, a\rangle|^2}{\langle a, a\rangle}$.

La desigualdad de Schwarz

33 Ejercicio. Este ejercicio es una preparación para resolver el Ejercicio 34. Sean $a, b \in H$ tales que $a \neq 0_H$. Definimos u como en el Ejercicio 31 y denotamos $b - u$ por w:

$$u := \frac{\langle b, a\rangle}{\langle a, a\rangle} a, \qquad w := b - u.$$

I. Calcular $\langle u, u\rangle$.
II. Mostrar que $u \perp w$.
III. Mostrar que $\langle b, b\rangle = \langle u, u\rangle + \langle w, w\rangle$. Se puede usar el Ejercicio 28.
IV. Mostrar que $\langle b, b\rangle \geq \langle u, u\rangle$. Se puede usar el Ejercicio 29.

34 Ejercicio (la desigualdad de Schwarz)**.** Sean $a, b \in H$. Demostrar que

$$|\langle a, b \rangle|^2 \le \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle.$$

Sugerencia: en el caso $a = 0_H$ el resultado es trivial; en el caso $a \ne 0_H$ usar el Ejercicio 33.

35 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad de Schwarz)**.** Sean $a, b \in H$ tales que

$$|\langle a, b \rangle|^2 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle. \tag{1}$$

Mostrar que los vectores a y b son linealmente dependientes. Sugerencias:

- considerar por separado el caso trivial $a = 0_H$;
- en el caso $a \ne 0_H$, usar la notación y los resultados del Ejercicio 33;
- en el caso $a \ne 0_H$, mostrar que la igualdad (1) implica la igualdad $\langle b, b \rangle = \langle u, u \rangle$.

La norma inducida por un producto interno

36 Ejercicio. Sea $z \in \mathbb{C}$. Mostrar que

$$\operatorname{Re}(z) \le |\operatorname{Re}(z)| \le |z|.$$

37 Ejercicio (la norma inducida por un producto interno)**.** Definimos $N\colon H \to [0, +\infty)$ mediante la regla

$$N(a) := \sqrt{\langle a, a \rangle}.$$

Mostrar que N es una norma en H, esto es, N es subaditiva, absolutamente homogénea y $N(a) > 0$ para cada a en $H \setminus \{0_H\}$. En la demostración de la propiedad subaditiva, usar el Ejercicio 36 y la desigualdad de Schwarz. Después de verificar que N tiene estas propiedades, escribimos $\|a\|$ en vez de $N(a)$.

38 Ejercicio. Escribir la desigualdad de Schwarz con la notación $\|\cdot\|$.

39 Ejercicio. Sean a, b dos vectores *codirigidos* en H, es decir, $a = 0_H$ o existe $\lambda \ge 0$ tal que $b = \lambda a$. Demostrar que

$$\|a + b\| = \|a\| + \|b\|.$$

40 Ejercicio. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) = |z|$. Demostrar que $z \in \mathbb{R}$ y $z \ge 0$.

41 Ejercicio (criterio de igualdad en la propiedad subaditiva de la norma inducida por un producto interno)**.** Sean $a, b \in H$ tales que

$$\|a + b\| = \|a\| + \|b\|. \tag{2}$$

Demostrar que los vectores a y b son codirigidos, esto es, $a = 0_H$ o existe $\lambda \geq 0$ tal que $b = \lambda a$. Sugerencia: repasar la demostración de la propiedad subaditiva (Ejercicio 37) y agregar la condición (2):

$$(\|a\| + \|b\|)^2 = \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle a, b\rangle) + \|b\|^2 \leq \ldots \leq (\|a\| + \|b\|)^2.$$

Concluir que ciertas desigualdades deben convertirse en igualdades. Usar los resultados de los Ejercicios 35 y 40.

42 Ejercicio (criterio de ortogonalidad en términos de la norma)**.** Sean $a, b \in H$. Demostrar que

$$a \perp b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \|\lambda a + b\|^2 \geq \|b\|^2.$$

Sugerencia: usar la idea del Ejercicio 31.

La continuidad del producto interno

43 Ejercicio (continuidad del producto interno)**.** Mostrar que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es continua. El dominio $H \times H$ se considera con la topología del producto de espacios topológicos. En otras palabras, mostrar que para cada $a, b \in H$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada u, v en H con $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, se cumple la desigualdad

$$|\langle u, v\rangle - \langle a, b\rangle| < \varepsilon.$$

Sugerencia: restar y sumar $\langle u, b\rangle$, luego aplicar la desigualdad de Schwarz.

44 Ejercicio (continuidad del producto interno en términos de sucesiones)**.** Sean $a, b \in H$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H que converge al vector a, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H que converge al vector b. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle a, b\rangle.$$

45 Ejercicio (el complemento ortogonal de cualquier conjunto es un subespacio cerrado)**.** Sea $A \subseteq H$. Demostrar que $A^\perp$ es cerrado.

46 Ejercicio (la cerradura de cualquier subespacio vectorial es un subespacio vectorial)**.** Sea S un subespacio vectorial de H. Demostrar que $\mathrm{cl}(S)$ es un subespacio vectorial de H. Este resultado es cierto no solamente en espacios con producto interno, sino también en espacios normados.

47 Ejercicio (la cerradura del subespacio generado por un conjunto de vectores)**.** Sea $X \subseteq H$. Demuestre que $\mathrm{cl}(\ell(X))$ es el mínimo entre los subespacios cerrados que contienen a X. Este resultado es cierto no solamente en espacios con producto interno, sino también en espacios normados.

La proyección ortogonal de un vector sobre el subespacio generado por una lista ortogonal de vectores

48 Ejercicio (expresión de los coeficientes de una combinación lineal de vectores ortogonales a pares a través del producto interno)**.** Sea m en $\mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m$ una lista ortogonal de vectores no nulos en H y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$. Denotemos por u la combinación lineal

$$u := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Demostrar que para cada j en $\{1, \ldots, m\}$

$$\lambda_j = \frac{\langle u, a_j \rangle}{\langle a_j, a_j \rangle}.$$

49 Ejercicio (independencia lineal de vectores ortogonales no nulos)**.** Sea m en $\mathbb{N}$ y sea $a_1, \ldots, a_m$ una lista de vectores ortogonales no nulos. Demuestre que la lista $a_1, \ldots, a_m$ es linealmente independiente.

Proyección ortogonal al subespacio generado por una lista ortogonal de vectores

50 Ejercicio. Sean $v \in H$, $m \in \mathbb{N}$ y sea $a_1, \ldots, a_m$ una lista ortogonal de vectores no nulos en H. Pongamos $S = \ell(a_1, \ldots, a_m)$. Demostar que existe un único vector u en S tal que $v - u \in S^{\perp}$. Mostrar que

$$u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, a_k \rangle}{\|a_k\|^2}\, a_k.$$

51 Ejercicio. En la notación del Ejercicio 50, pongamos $w := v - u$. Notamos que

$$v = u + w = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, a_k \rangle}{\|a_k\|^2}\, a_k + w.$$

Demostrar que

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{|\langle v, a_k \rangle|^2}{\|a_k\|^2} + \|w\|^2.$$

52 Ejercicio. Simplificar las fórmulas de los ejercicios anteriores en el caso cuando la lista $(a_1, \ldots, a_m)$ es ortonormal.

53 Ejercicio. Sea $a \in H \setminus \{0_H\}$. Definimos $P_a \colon H \to H$ mediante la regla

$$P_a(x) := \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2}\, a.$$

Demostrar que $P_a \in \mathcal{B}(H)$ y $P_a^2 = P_a$. Encontrar la imagen y el núcleo del operador P_a.

54 Ejercicio. Sean $H = \mathbb{C}^n$, $a \in H \setminus \{0_H\}$. Demostrar que para cada x en $\mathbb{C}^n$

$$P_a(x) = M_a x,$$

donde la matriz M_a está definida mediante la regla

$$M_a := \frac{1}{\|a\|^2}\, a\, a^*.$$

55 Ejercicio. Encontrar en $H = \mathbb{C}^2$ dos vectores no nulos a y b tales que

$$M_a M_b \neq M_b M_a, \qquad M_a M_b \neq 0_{2\times 2}, \qquad M_b M_a \neq 0_{2\times 2}.$$

Mostrar que en este ejemplo

$$P_a P_b \neq P_b P_a, \qquad P_a P_b \neq 0_{\mathcal{B}(H)}, \qquad P_b P_a \neq 0_{\mathcal{B}(H)}.$$

56 Ejercicio (la desigualdad de Bessel finita)**.** Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ una lista ortonormal en H y sea $v \in H$. Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Sugerencia: usar la notación y los resultados del Ejercicio 51.

57 Ejercicio (el criterio de pertenencia de un vector al subespacio generado por una lista ortonormal de vectores)**.** Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$. Pongamos

$$S \coloneqq \ell(a_1, \ldots, a_m).$$

Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes entre si:

(a) $v \in S$;

(b) $v = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle\, a_k$;

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 = \|v\|^2$.

Ejemplos de espacios con producto interno

58 Ejercicio. Denotemos por $c_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ el espacio de las sucesiones de soporte finito:

$$c_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \coloneqq \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \colon\; \exists k \in \mathbb{N}\ \forall n > k\ a_k = 0 \right\}.$$

Mostrar que la siguiente función es un producto interno en $c_{\text{fin}}(\mathbb{N})$:

$$\langle a, b \rangle \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}.$$

59 Ejercicio. Definir el producto interno canónico en $\ell^2(\mathbb{N})$.

60 Ejercicio. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Definir el producto interno canónico en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$.

La identidad de paralelogramo, la identidad de polarización y el teorema de Pitágoras

61 Ejercicio (la identidad de paralelogramo)**.** Sean $a, b \in H$. Demostrar que

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

62 Ejercicio. Demostrar que la norma del espacio ℓ^1 no proviene de ningún producto interno. Sugerencia: encontrar un par de vectores para los cuales no se cumple la identidad de paralelogramo.

63 Ejercicio (la identidad de Apolonio)**.** Sean $a, b \in H$. Demostrar que

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2.$$

Sugerencia: deducir esta identidad de la identidad de paralelogramo. Explicar el sentido geométrico (los lados de un triángulo y la mediana).

64 Ejercicio (la identidad de polarización)**.** Sean $a, b \in H$. Demostrar que

$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, \|a + \mathrm{i}^k\, b\|^2.$$

65 Ejercicio (el teorema de Pitágoras para la suma de dos vectores ortogonales en un espacio con producto interno)**.** Sean $a, b \in H$ tales que $a \perp b$. Demuestre que

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

66 Ejercicio (el teorema de Pitágoras para la suma finita de vectores ortogonales en un espacio con producto interno)**.** Sean $m \in \mathbb{N}$ y sea $a_1, \ldots, a_m$ una lista ortogonal en H. Demostrar que

$$\left\|\sum_{j=1}^{m} a_j\right\| = \sum_{j=1}^{m} \|a_j\|^2.$$

67 Ejercicio (criterio para que una función lineal entre espacios con producto interno sea isometría)**.** Sean H_1, H_2 espacios con productos internos $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$, respectivamente. Denotamos por $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ a las normas inducidas y por d_1, d_2 a las distancias inducidas. Sea $A\colon H_1 \to H_2$ una transformación lineal. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) A preserva el producto interno:

$$\forall x, y \in H_1 \qquad \langle Ax, Ay\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1.$$

(b) A preserva la norma:

$$\forall x \in H_1 \qquad \|Ax\|_2 = \|x\|_1.$$

(c) A preserva la distancia (en otras palabras, A es isometría):

$$\forall x, y \in H_1 \qquad d_2(Ax, Ay) = d_1(x, y).$$

Convexidad estricta de las bolas en espacios con producto interno

68 Definición (conjunto estrictamente convexo)**.** Sea V un espacio normado. Un conjunto $A \subseteq V$ se llama *convexo* si para cada a, b en A y cada λ en $[0, 1]$ se tiene que

$$(1 - \lambda)a + \lambda b \in A.$$

Un conjunto $A \subseteq V$ se llama *estrictamente convexo* si para cada a, b en A, tales que $a \neq b$, y cada λ en $(0, 1)$ se tiene que

$$(1 - \lambda)a + \lambda b \in \operatorname{int}(A).$$

Aquí $\operatorname{int}(A)$ es el interior de A.

En la solución de los siguientes ejercicios es cómodo usar la identidad de paralelogramo (o la identidad de Apolonio).

69 Ejercicio. Sean $a, b \in H$, $r > 0$, tales que $\|a\| \leq r$, $\|b\| \leq r$, $a \neq b$. Demostrar que

$$\left\| \frac{a + b}{2} \right\| < r.$$

70 Ejercicio. Sea $r > 0$. Demostrar que el conjunto $\{a \in H \colon \ \|a\| \leq r\}$ es estrictamente convexo.

71 Ejercicio. Sea $\xi > 0$ y sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en H tales que $\|a_n\| \to \xi$, $\|b_n\| \to \xi$, y

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left\| \frac{a_n + b_n}{2} \right\| \geq \xi.$$

Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \|a_n - b_n\| = 0$.

Algunas propiedades de la operación "complemento ortogonal"

72 Ejercicio. Sea $X \subseteq H$. Demostrar que $X^\perp$ es un subespacio cerrado de H.

73 Ejercicio. Sea $X \subseteq H$. Demostrar que $X^\perp = (\operatorname{cl}(\ell(X)))^\perp$.

74 Ejercicio. Sean $X, Y \subseteq H$ tales que $0_H \in X$, $0_H \in Y$. Demostrar que $(X + Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$.

El proceso de ortogonalización de Gram y Schmidt

75 Ejercicio. Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ una lista linealmente independiente en H. Para cada p en $\{1, \ldots, m\}$, pongamos

$$S_p := \ell(a_1, \ldots, a_p).$$

Para cada p en $\{1, \ldots, m\}$ pongamos

$$b_p := a_p - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\langle a_p, b_k \rangle}{\|b_k\|^2} b_k.$$

Mostrar que para cada p en $\{1, \ldots, m\}$ la lista $(b_1, \ldots, b_p)$ es una base ortogonal del subespacio $\ell(a_1, \ldots, a_p)$.

76 Ejercicio. Mostrar que para cada p en $\{1, \ldots, m\}$,

$$b_p = a_p - P_{S_p}(a_p).$$

77 Ejercicio (el proceso de ortonormalización de Gram y Schmidt)**.** Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ una lista linealmente independiente en H. Para cada p en $\{1, \ldots, m\}$ pongamos

$$b_p = a_p - \sum_{k=1}^{p-1} \langle a_p, u_k \rangle u_k, \qquad u_p = \frac{b_p}{\|b_p\|}.$$

Mostrar que para cada p en $\{1, \ldots, m\}$ la lista $(u_1, \ldots, u_p)$ es una base ortonormal de $\ell(a_1, \ldots, a_p)$.

Propiedades elementales de las sucesiones ortogonales

78 Ejercicio (el teorema de Pitágoras para las series ortogonales)**.** Sea $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión ortogonal en H. Supongamos que la serie converge a un vector z, $z \in H$:

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

En otras palabras, estamos suponiendo que

$$\lim_{m \to \infty} \|s_m - z\| = 0, \qquad \text{donde} \qquad s_m := \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Demostrar que

$$\|z\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

Sugerencia. Demostrar que

$$\|s_m\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2,$$

y pasar al límite cuando $m \to \infty$.

79 Ejercicio (la desigualdad de Bessel)**.** Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$. Demostrar que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle v, a_k\rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Sugerencia: escribir la desigualdad de Bessel finita, Ejercicio 56, y pasar al límite.

Desigualdad de Ptolomeo

Suponemos que H es un espacio vectorial complejo con producto interno.

80 Ejercicio. Sean $a, b \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Simplificar la expresión

$$\|\lambda a + b\|^2.$$

81 Ejercicio. Sean $a, b \in H$ tales que $\|a\| = \|b\| = 1$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostrar que

$$\|\lambda a + b\| = \|a + \lambda b\|.$$

82 Ejercicio. Sean $a, b \in H \setminus \{0_H\}$. Simplificar la expresión

$$\|a\|\,\|b\| \left\| \frac{a}{\|a\|^2} - \frac{b}{\|b\|^2} \right\|.$$

83 Ejercicio (desigualdad de Ptolomeo)**.** Sean $a, b, c \in V$. Demostrar que

$$\|a - b\|\,\|c\| \leq \|b - c\|\,\|a\| + \|c - a\|\,\|b\|.$$

84 Ejercicio (una distancia en H invariante bajo dilataciones)**.** Definimos $\rho\colon H^2 \to [0,+\infty)$ mediante la regla:

$$\rho(a,b) := \begin{cases} \dfrac{\|a-b\|}{\text{máx}\{\|a\|,\|b\|\}}, & a \in V,\ b \in V, \quad a \neq 0_H \quad \vee \quad b \neq 0_H; \\ 0, & a = b = 0_H. \end{cases}$$

Demostrar que ρ es una distancia (usar la desigualdad de Ptolomeo). Demostrar que para cualesquiera a, b en H y λ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ se cumple la igualdad

$$\rho(\lambda a, \lambda b) = \lambda \rho(a,b).$$