Derivación e integración

Problemas para examen

La lista de problemas todavía no es completa.

Lema de Vitali

1. Cubiertas de Vitali. Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$ y sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$. ¿Cuándo se dice que $\mathcal{A}$ es una cubierta de Vitali de E?

2. Sean E un subconjunto de $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ una cubierta de Vitali de E, F un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ y $x \in E \setminus F$. Demuestre que existe A en $\mathcal{A}$ tal que $x \in A$ y $A \cap F = \varnothing$.

3. Lema de Vitali: reducción al caso de conjuntos cerrados. Muestre cómo demostrar el lema de Vitali, suponiendo que este lema ya está demostrado para el caso cuando cada elemento de $\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado.

4. Aproximación de la medida superior por arriba, usando conjuntos abiertos. Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $\mu^*(E) < +\infty$. Justifique que existe un conjunto abierto U en $\mathbb{R}$ tal que $E \subset U$ y $\mu(U) < +\infty$.

5. Lema de Vitali: reducción al caso de conjuntos contenidos en un conjunto abierto. Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $\mu^*(E) < +\infty$ y sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ tal que $E \subset U$ y $\mu(U) < +\infty$. Supongamos que $\mathcal{A}$ es una cubierta de Vitali de E. Pongamos

$$\mathcal{B} \coloneqq \{A \in \mathcal{A} \colon\ A \subset U\}.$$

Demuestre que $\mathcal{B}$ es una cubierta de Vitali de E.

6. Lema de Vitali. Enuncie y demuestre el lema de Vitali. Usando los resultados de los ejercicios anteriores, se puede suponer que todos los elementos de la cubierta son intervalos cerrados y que todos los elementos de la cubierta están contenidos en un conjunto abierto de medida finita.

Derivada de la función monótona

7. Derivadas de Dini. Escriba las definiciones de las derivadas laterales superiores e inferiores de una función real:

$$(D^+ f)(x) \coloneqq \limsup_{t \to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \qquad (D_+ f)(x) = ?, \quad (D^- f)(x) = ?, \quad (D_- f)(x) = ?.$$

8. Relaciones simples entre las derivadas de Dini. Explique por qué $(D_+ f)(x) \le (D^+ f)(x)$ y $(D_- f)(x) \le (D^- f)(x)$. ¿Cuándo todas las cuatro derivadas son iguales entre si?

9. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \in (a,b)$. Supongamos que $(D^+ f)(x) \le (D_- f)(x)$ y $(D_+ f)(x) \ge (D^- f)(x)$. Muestre que f tiene una derivada en x.

10. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \in [a,b)$ y $v \in \mathbb{R}$ tal que $v < (D^+ f)(x)$. Muestre que para cada $\delta > 0$ existe h en $(0,\delta)$ tal que $x + h \in [a,b]$ y

$$f(x+h) - f(x) > vh.$$

11. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \in (a,b]$ y $u \in \mathbb{R}$ tal que $u > (D_- f)(x)$. Muestre que para cada $\delta > 0$ existe h en $(0,\delta)$ tal que $x - h \in [a,b]$ y

$$f(x) - f(x-h) < uh.$$

12. Teorema sobre la derivada de una función creciente. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Demuestre que f tiene derivada en casi todo punto de $[a,b]$.

13. Corolario sobre la integral de la derivada de una función creciente. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Demuestre que f' es medible y

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \le f(b) - f(a).$$