Conjuntos convexos y funciones convexas

Problemas para examen

En esta unidad del curso se trata de propiedades elementales de conjuntos convexos y funciones convexas. Hay muchas propiedades más complicadas que se estudian en libros especiales (por ejemplo, Rockafellar, “Convex analysis”).

Conjuntos convexos en un espacio vectorial real

En estos ejercicios suponemos que V es un espacio vectorial real o complejo.

1 Definición (definición de conjunto convexo)**.** Sea $A \subseteq V$. Se dice que A es *convexo* si para cualesquiera a, b en A y cualquier λ en $[0, 1]$ se tiene

$$(1 - \lambda)a + \lambda b \in A.$$

2 Ejercicio (una variación de la definición de conjunto convexo)**.** Sea $A \subseteq V$. Mostrar que A es convexo si, y solo si, para cualesquiera a, b en A y cualesquiera $\xi, \eta \geq 0$ tales que $\xi + \eta = 1$, se tiene que

$$\xi a + \eta b \in A.$$

3 Ejercicio (criterio de conjunto convexo, excluyendo casos triviales)**.** Sea $A \subseteq V$. Demostrar que A es convexo si, y solo si, para cualesquiera a, b en A tales que $a \neq b$, y para cualquier λ en $]0, 1[$,

$$(1 - \lambda)a + \lambda b \in A.$$

4 Definición (combinación convexa de una lista de vectores)**.** Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sea $v \in V$. Se dice que v es una *combinación convexa* de los vectores $a_1, \ldots, a_m$, si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ tales que

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1, \qquad v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

5 Definición (definición constructiva de la envoltura convexa)**.** Sea $A \subseteq V$. Definimos $\operatorname{conv}(A)$ de la siguiente manera:

$$\operatorname{conv}(A) \coloneqq \Bigg\{ v \in V : \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \exists a_1, \ldots, a_m \in A \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0 \quad \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1 \quad \wedge \quad v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k \right) \Bigg\}.$$

En otras palabras, $\operatorname{conv}(A)$ consiste de las combinaciones convexas de algunos elementos de A. Se recomienda entender y reproducir esta definición.

6 Ejercicio. Sea $A \subseteq V$. Para cada m en $\mathbb{N}$, definimos $\operatorname{conv}_m(A)$ de la siguiente manera:

$$\operatorname{conv}_m(A) := \Bigg\{ v \in V: \quad \exists a_1,\ldots,a_m \in A \quad \exists \lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0 \quad \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1 \quad \wedge \quad v = \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k \right) \Bigg\}.$$

En otras palabras, $\operatorname{conv}_m(A)$ consiste de las combinaciones convexas de algunos m elementos de A. Mostrar que

$$\operatorname{conv}(A) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \operatorname{conv}_m(A).$$

7 Ejercicio. Sea $A \subseteq V$. Encontrar $\operatorname{conv}_1(A)$.

8 Ejercicio (la envoltura convexa de un conjunto siempre contiene a este conjunto)**.** Sea $A \subseteq V$. Demostrar que $A \subseteq \operatorname{conv}(A)$.

La envoltura convexa de cualquier conjunto es convexa

9 Ejercicio. Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \in V$, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2 \geq 0$, tales que

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1, \qquad \eta_1 + \eta_2 = 1,$$

y sea $\lambda \in [0, 1]$. Definimos

$$u := \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \qquad v := \eta_1 b_1 + \eta_2 b_2, \qquad w := (1-\lambda)u + \lambda v.$$

Mostrar que w es una combinación convexa de a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Se recomienda usar los siguientes objetos auxiliares:

$$c_k := \begin{cases} a_k, & k \in \{1,2,3\}; \\ b_{k-3}, & k \in \{4,5\}, \end{cases} \qquad \gamma_k := \begin{cases} (1-\lambda)\xi_k, & k \in \{1,2,3\}; \\ \lambda\eta_k, & k \in \{4,5\}. \end{cases}$$

10 Ejercicio (teorema: la envoltura convexa de cualquier conjunto es convexa)**.** Sea $A \subseteq V$. Demostrar que el conjunto $\operatorname{conv}(A)$ es convexo. Usar la idea del Ejercicio 9.

Cada conjunto convexo coincide con su envoltura convexa

11 Ejercicio. Sea $A \subseteq V$ un conjunto convexo. Explicar por qué $\operatorname{conv}_1(A) \subseteq A$ y $\operatorname{conv}_2(A) \subseteq A$.

12 Ejercicio. Sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in V$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ tales que $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 1$ y $\lambda_4 \neq 1$. Definimos

$$v \coloneqq \sum_{k=1}^{4} \lambda_k a_k,$$

$$\xi_1 \coloneqq \frac{\lambda_1}{1-\lambda_4}, \qquad \xi_2 \coloneqq \frac{\lambda_2}{1-\lambda_4}, \qquad \xi_3 \coloneqq \frac{\lambda_3}{1-\lambda_4}, \qquad u \coloneqq \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3.$$

Mostrar que

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \geq 0, \qquad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1, \qquad v = (1-\lambda_4)u + \lambda_4 a_4.$$

13 Ejercicio. Sea $A \subseteq V$ y sea $v \in \operatorname{conv}_6(A)$. Encontrar $u \in \operatorname{conv}_5(A)$ y $w \in A$ tales que v sea una combinación convexa de u y w. Usar la idea del Ejercicio 12.

14 Ejercicio (teorema: cada conjunto convexo coincide con su envoltura)**.** Sea A un subconjunto convexo de V. Demostrar que $\operatorname{conv}(A) = A$. En otras palabras, esto significa que en la definición del conjunto convexo podríamos admitir combinaciones convexas de cualquier número finito de vectores. Sugerencia: demostrar por inducción sobre m en $\mathbb{N}$ que

$$\operatorname{conv}_m(A) \subseteq A,$$

donde $\operatorname{conv}_m(A)$ está definido en el Ejercicio 6. Usar la idea de los Ejercicios 12 y 13.

Corolarios de los teoremas sobre conjuntos convexas y envolturas convexas

15 Ejercicio (propiedad idempotente de la envoltura convexa)**.** Sea $A \subseteq V$. Demostrar que $\operatorname{conv}(\operatorname{conv}(A)) = \operatorname{conv}(A)$.

16 Ejercicio (la intersección de conjuntos convexos es convexa)**.** Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos convexos de V. Denotemos por B su intersección:

$$B \coloneqq \cap\mathcal{C} = \{v \in V : \quad \forall P \in \mathcal{C} \quad v \in P\}.$$

Demostrar que B es convexo.

17 Ejercicio (otra descripción equivalente de la envoltura convexa)**.** Sea $A \subseteq V$. Demostrar que $\operatorname{conv}(A)$ es el más pequeño entre todos los conjuntos convexos que contienen al conjunto A. En otras palabras, demostrar que $\operatorname{conv}(A)$ es el elemento mínimo de la colección

$$\mathcal{C} \coloneqq \{P \subseteq V : \quad P \text{ es convexo} \quad \wedge \quad A \subseteq P\}.$$

18 Ejercicio (la envoltura convexa como cierta intersección)**.** Sea $A \subseteq V$. Demostrar que $\operatorname{conv}(A) = \cap\mathcal{C}$, donde la colección $\mathcal{C}$ está definida en el ejercicio anterior.

Subconjuntos convexos de $\mathbb{R}$

19 Ejercicio (una observación trivial sobre el ínfimo y el supremo). Sea $X \subseteq \mathbb{R}$. Denotamos por a y b su ínfimo y supremo, respectivamente (en general, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$):

$$a \coloneqq \inf(X), \qquad b \coloneqq \sup(X).$$

Explicar por qué $X \subseteq [a, b]$.

20 Ejercicio (el lema principal para demostrar que los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}$ son intervalos). Sea X un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$. Denotamos por a y b su ínfimo y supremo, respectivamente (en general, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$):

$$a \coloneqq \inf(X), \qquad b \coloneqq \sup(X).$$

Demostrar que $]a, b[\subseteq X$.

21 Ejercicio (varias descripciones equivalentes de los intervalos del eje real). Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- X es convexo;
- $]\inf(X), \sup(X)[\subseteq X$;
- X es un intervalo, es decir, existen a y b en $\overline{\mathbb{R}}$ tales que X tiene una de las siguientes formas:
$$]a, b[\,, \qquad]a, b], \qquad [a, b[\,, \qquad [a, b];$$

22 Ejercicio (conjuntos convexos, conexos y conejos). Para los estudiantes que estudiaron elementos de la topología general, se recomienda demostrar que las condiciones del Ejercicio 21 son equivalentes a cada una de las siguientes condiciones:

- X es conexo;
- X es arco-conexo.

Funciones convexas definidas en un espacio vectorial real

En estos ejercicios suponemos que V es un espacio vectorial real o complejo. Entendemos la convexidad en el sentido $\smile$.

23 Definición (definición de función convexa)**.** Sea A un subconjunto convexo de V y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *convexa* si para cada a, b en A y cada λ en $[0, 1]$,

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \le (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

24 Ejercicio (criterio de función convexa en términos de su epigrafo)**.** Sea A un subconjunto convexo de V y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Definimos el *epigrafo* (*sobregrafo*) de f de la siguiente manera:

$$E_f \coloneqq \big\{(x, v) \in A \times \mathbb{R}: \quad v \ge f(x)\big\}.$$

Notemos que $V \times \mathbb{R}$ es un espacio vectorial real con las operaciones componente a componente. Demostrar que f es convexa si, y solo si, el conjunto E_f es convexo.

25 Ejercicio (en la definición de función convexa, podemos quitar los casos cuando los puntos coinciden)**.** Sea A un subconjunto convexo de V y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Demostrar que f es convexa si, y solo si, para cualesquiera a, b en A que satisfacen $a \ne b$, y cualquier λ en $]0, 1[$,

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \le (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

26 Ejercicio (la desigualdad finita de Jensen para funciones convexas)**.** Sea A un subconjunto convexo de V y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa. Demostrar que para cada m en $\mathbb{N}$, cada $a_1, \ldots, a_m$ en A y cada $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \ge 0$, si $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$, entonces

$$f\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k a_k\right) \le \sum_{k=1}^m \lambda_k f(a_k).$$

Sugerencia: usar la idea del Ejercicio 12.

27 Definición (función estrictamente convexa)**.** Sea A un subconjunto finito de V y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *convexa* si para cualesquiera a, b en A, tales que $a \ne b$, y cada λ en $]0, 1[$,

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) < (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

28 Ejercicio (desigualdad finita de Jensen para funciones estrictamente convexas)**.** Enunciar y demostrar la desigualdad finita de Jensen (estricta) para funciones estrictamente convexas.

Funciones convexas definidas en intervalos del eje real

29 Ejercicio. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Recordar la definición de las diferencias divididas del primer orden. Demostrar que

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \Delta_f(x_2, x_1).$$

30 Ejercicio. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Recordar la definición de las diferencias divididas del segundo orden. Representar $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ como una combinación lineal de $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, con coeficientes que no dependen de f. Mostrar que $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ es simétrica respecto a x_1, x_2, x_3.

31 Ejercicio (criterio de la convexidad de una función en términos de diferencias divididas del primer orden)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in A$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

(c) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_1, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in A$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

(d) $\Delta_f(x_1, x_3) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in A$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

32 Ejercicio (criterio de la convexidad estricta de una función en términos de diferencias divididas del primer orden)**.** Enunciar y demostrar un criterio similar para las funciones estrictamente convexas.

33 Ejercicio (criterio de la convexidad de una función en términos de diferencias divididas del segundo orden)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) $\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \ge 0$ para todos puntos x_1, x_2, x_3 en A, diferentes a pares.

34 Ejercicio (criterio de la convexidad estricta de una función en términos de diferencias divididas del segundo orden)**.** Enunciar y demostrar un criterio similar para la desigualdad estricta.

35 Ejercicio (ejemplos de funciones cóncavas)**.** Demostrar que las siguientes funciones son cóncavas:

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := -x^2$.
- $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) := \sqrt{x}$.
- $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) := \min\{x, 1\}$.

36 Ejercicio (propiedad subaditiva para funciones cóncavas)**.** Sea $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una función cóncava. Además, supongamos que $f(0) \ge 0$. Demostrar que para cada $a, b \ge 0$,

$$f(a+b) \le f(a) + f(b).$$

Sugerencia. Aplicar la desigualdad

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \ge (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

primero con $x = 0$, $y = a+b$, $\lambda = \frac{b}{a+b}$, luego con $x = 0$, $y = a+b$, $\lambda = \frac{a}{a+b}$, y después sumar las dos desigualdades obtenidas.

37 Ejercicio (composición de una función cóncava con una distancia)**.** Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una función cóncava. Supongamos que $f(0) = 0$ y $f(t) > 0$ para $t > 0$. Demostrar que $\rho \coloneqq f \circ d$ también es una distancia.

38 Ejercicio (composición de una función cóncava con una pseudodistancia)**.** Sea (X, d) un espacio pseudométrico y sea $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una función cóncava y tal que $f(0) = 0$. Definimos $d_1\colon X^2 \to [0,+\infty)$, $d_1(x,y) \coloneqq f(d(x,y))$. Demostrar que d_1 es una pseudodistancia.

39 Ejercicio (la propiedad creciente de una función cóncava positiva definida en un rayo derecho)**.** Sea $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una función cóncava y sean $x, y \in [0,+\infty)$ tales que $x < y$. Demostrar que $f(x) \le f(y)$. Sugerencia: dado $z > y$, expresar y como una combinación convexa de x, z; usar la definición de concavidad y pasar al límite cuando z tiende a $+\infty$.

Derivadas laterales de las funciones convexas definidas en intervalos de la recta real

40 Ejercicio (la derivada izquierda de una función convexa)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa y sea $x \in A$, $x \ne \inf(A)$. Demostrar que

$$\lim_{t \to x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \sup_{\substack{t < x \\ t \in A}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Denotemos este límite por $f'_{\text{izq}}(x)$. Demostrar que

$$f'_{\text{izq}}(x) > -\infty.$$

41 Ejercicio (la derivada derecha de una función convexa)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa y sea $x \in A$, $x \ne \sup(A)$. Demostrar que

$$\lim_{t \to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \inf_{\substack{t > x \\ t \in A}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Denotamos este límite por $f'_{\text{der}}(x)$. Demostrar que

$$f'_{\text{der}}(x) < +\infty.$$

42 Ejercicio (la derivada izquierda y derecha de la función cuya gráfica es la semicircunferencia inferior)**.** Definimos $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \coloneqq -\sqrt{1-x^2}.$$

Calcular $f'_{\mathrm{der}}(-1)$ y $f'_{\mathrm{izq}}(1)$.

43 Ejercicio (comparación de la derivada izquierda con la derivada derecha de una función convexa)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa y sea $x \in \mathrm{int}(A)$. Demostrar que

$$-\infty < f'_{\mathrm{izq}}(x) \le f'_{\mathrm{der}}(x) < +\infty.$$

44 Ejercicio (la derivada izquierda de una función convexa crece)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa. Demostrar que la función f'_{izq} crece en $A \setminus \{\inf(A)\}$.

45 Ejercicio (la derivada derecha de una función convexa crece)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa. Demostrar que la función f'_{der} crece en $A \setminus \{\sup(A)\}$.

Criterios de convexidad en términos de las derivadas, para funciones definidas en intervalos de la recta real

46 Ejercicio (teorema: criterio de la convexidad de una función en términos de su primera derivada)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en A y derivable en $\mathrm{int}(A)$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) f' es creciente en $\mathrm{int}(A)$.

47 Ejercicio (corolario: criterio de la convexidad de una función en términos de su segunda derivada)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en A y dos veces derivable en $\mathrm{int}(A)$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) $f''(x) \ge 0$ para todo x en $\mathrm{int}(A)$.

48 Ejercicio (convexidad estricta de una función cuya primera derivada crece estrictamente)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en A y derivable en $\mathrm{int}(A)$. Supongamos que f' es estrictamente creciente. Demostrar que f es estrictamente convexa, es decir, si $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \ne x_2$ y $\alpha \in]0,1[$, entonces

$$f((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) < (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2).$$

49 Ejercicio (convexidad estricta de una función cuya segunda derivada es estrictamente positiva)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en A y dos veces derivable en $\operatorname{int}(A)$. Supongamos que $f''(x) > 0$ para cada x en $\operatorname{int}(A)$. Demostrar que f es estrictamente convexa.

50 Ejercicio (¿si una función es estrictamente convexa, su derivada debe crecer de manera estricta?)**.** Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $f\colon A \to \mathbb{R}$ es una función continua en A y derivable en $\operatorname{int}(A)$. Además, supongamos que f es convexa. ¿Podemos afirmar que f' crece de manera estricta? Escribir una demostración o construir un contraejemplo.

51 Ejercicio (¿si una función es estrictamente convexa, su segunda derivada debe ser estrictamente positiva?)**.** Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $f\colon A \to \mathbb{R}$ es una función continua en A y dos veces derivable en $\operatorname{int}(A)$. Además, supongamos que f es convexa. ¿Podemos afirmar que $f''(x) > 0$ para cada x en $\operatorname{int}(A)$? Escribir una demostración o construir un contraejemplo.

52 Ejercicio (una cota inferior para la función seno)**.** Sea $f\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq -\operatorname{sen}(x)$. Demostrar que f es extrictamente convexa. Demostrar que para cada x en $]0, \pi/2[$,

$$\operatorname{sen}(x) > \frac{2}{\pi}\, x.$$

La convexidad de la función potencia y sus aplicaciones

53 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty[$. Definimos $\varphi\colon [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ mediante la regla

$$\varphi(t) \coloneqq t^p.$$

Demostrar que φ es convexa.

54 Ejercicio. Sean $a, b \geq 0$, $p \in [1, +\infty[$. Demostrar que

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Sugerencia: usar el resultado del Ejercicio 53.

55 Ejercicio. Sea $p \in]1, +\infty[$. Definimos $\varphi\colon [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ mediante la regla

$$\varphi(t) \coloneqq t^p.$$

Demostrar que φ es estrictamente convexa.

56 Ejercicio. Sea $p \in]0, 1[$. Definimos $\varphi\colon [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ mediante la regla

$$\varphi(t) \coloneqq t^p.$$

Demostrar que φ es estrictamente cóncava, es decir, $-\varphi$ es estrictamente convexa.

Convexidad de la función exponencial, desigualdad de Young

57 Ejercicio (algunas propiedades de la función exponencial)**.** Definimos $\exp_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se puede definir mediante la regla

$$\exp_{\mathbb{R}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Demostrar que para cualesquiera x, y en $\mathbb{R}$ se cumple la igualdad

$$\exp_{\mathbb{R}}(x+y) = \exp_{\mathbb{R}}(x)\exp_{\mathbb{R}}(y).$$

Demostrar que para cualquier x en $\mathbb{R}$ se cumple

$$\exp_{\mathbb{R}}(-x) = \frac{1}{\exp_{\mathbb{R}}(x)}.$$

Demostrar que

$$\exp_{\mathbb{R}}' = \exp_{\mathbb{R}}.$$

Demostrar que $\exp_{\mathbb{R}}(x) > 0$ para cada x en $\mathbb{R}$.

58 Ejercicio (convexidad de la función exponencial)**.** Demostrar que $\exp_{\mathbb{R}}$ es una función convexa. Mostrar que para todos $x, y \geq 0$ y todos $\alpha, \beta > 0$, tales que $\alpha + \beta = 1$, se cumple la desigualdad

$$x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y.$$

59 Ejercicio (convexidad estricta de la función exponencial)**.** Usando el resultado del Ejercicio 48 demostrar que la función exponencial $\exp + \mathbb{R}$ es estrictamente convexa. Demostrar que para todos $x, y \geq 0$, tales que $x \neq y$, y todos $\alpha, \beta > 0$, tales que $\alpha + \beta = 1$, se cumple la desigualdad

$$x^\alpha y^\beta < \alpha x + \beta y.$$

60 Ejercicio (desigualdad generalizada entre la media aritmética y la media geométrica)**.** Sean $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, $p_1, \ldots, p_n > 0$ tales que

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Demostrar que

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{n} p_k x_k. \tag{1}$$

Sugerencia: usar la desigualdad de Jensen finita para la función $\exp_{\mathbb{R}}$.

61 Ejercicio (desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica)**.** Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. Demostrar que

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Sugerencia: es un caso particular del resultado del Ejercicio 60.

62 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad generalizada entre la media aritmética y la media geométrica)**.** Sean $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n > 0$, $p_1, \ldots, p_n > 0$ tales que

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1, \qquad \prod_{k=1}^{n} x_k^{p_k} = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k.$$

Demostrar que $x_1 = \cdots = x_n$. Sugerencia: resolver el Ejercicio 28, luego usar el hecho que $\exp_{\mathbb{R}}$ es estrictamente convexa.

63 Ejercicio (la desigualdad de Young)**.** Sean $a, b \geq 0$ y sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Demostrar que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

64 Ejercicio (la desigualdad estricta de Young)**.** Sean $a, b \geq 0$ y sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $a^p \neq b^p$. Demostrar que

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Sugerencia: usar el resultado del Ejercicio 59.

65 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad de Young)**.** Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Supongamos que

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostrar que $a^p = b^q$. Sugerencia: usar el resultado del Ejercicio 64.

Rectas básicas para las gráficas de funciones convexas

66 Ejercicio (una recta básica para la gráfica de una función convexa, en el extremo izquierdo del dominio)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no trivial tal que $a := \inf(A) \in \mathbb{R}$, y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa.

1. Recordar la definición de $f'_{\mathrm{der}}(a)$ y demostrar que este límite es igual a cierto supremo o ínfimo.

2. Sea $\gamma := f'_{\mathrm{der}}(a)$. Supongamos que $\gamma \in \mathbb{R}$. Demostrar que para cada x en A,

$$f(x) \ge \gamma(x-a) + f(a).$$

3. Aplicar este resultado a la función $-\operatorname{sen}$ en el intervalo $[0, \pi]$. Demostrar de esta manera la desigualdad $\operatorname{sen}(x) \le x$ para cada x en $[0, \pi]$.

67 Ejercicio (existencia de una recta básica de la gráfica de una función convexa)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, sea $c \in \operatorname{int}(A)$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa. Sea $\alpha \in [f'_{\mathrm{izq}}(c), f'_{\mathrm{der}}(c)]$. Demostrar que para cada x en A se cumple la desigualdad

$$f(x) \ge \alpha(x-c) + f(c).$$

En particular, si f es derivable en c, entonces para cada x en A se cumple la desigualdad

$$f(x) \ge f'(c)(x-c) + f(c).$$

68 Ejercicio (la desigualdad de Bernoulli para las potencias no necesariamente enteras)**.** Sean $p \ge 1$, $x \ge -1$. Demostrar que

$$(1+x)^p \ge 1 + px.$$

69 Ejercicio (la desigualdad estricta de Bernoulli para potencias no necesariamente enteras)**.** Sean $p > 1$, $x > -1$, $x \ne 0$. Demostrar que

$$(1+x)^p > 1 + px.$$

La desigualdad integral de Jensen

70 Ejercicio (la desigualdad integral de Jensen para espacios de probabilidad)**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$, A un intervalo, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, A)$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa tal que $g \ge 0$. Demostrar que

$$g\left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right) \le \int_X (g \circ f)\,\mathrm{d}\mu.$$

Sugerencias. Sean

$$a \coloneqq \inf(A), \qquad b \coloneqq \sup(A), \qquad c \coloneqq \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Considerar por separado los casos cuando $c = a$ o $c = b$. En el caso principal, cuando $a < c < b$, usar la recta básica de la gráfica de la función g en el punto $(c, g(c))$.

71 Ejercicio (la desigualdad de Jensen para espacios de medida finita)**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $0 < \mu(X) < +\infty$, $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, A)$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa tal que $g \geq 0$. Demostrar que

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(X)} \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(X)} \int\limits_X \varphi \circ f \, \mathrm{d}\mu.$$

Sugerencia: considerar la medida normalizada $\nu(Y) \coloneqq \frac{\mu(Y)}{\mu(X)}$, es decir, la medida μ con peso $\frac{1}{\mu(X)}$.

72 Ejercicio (la desigualdad de Jensen para la función potencia)**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $0 < \mu(X) < +\infty$, $0 < p < +\infty$, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, [0, +\infty[\,)$. Demostrar que

$$\left(\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu\right)^p \leq \mu(X)^{p-1} \int\limits_X f^p \, \mathrm{d}\mu.$$

73 Ejercicio (una combinación convexa como una integral sobre un espacio de probabilidad discreto)**.** Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ tales que

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1,$$

y sean $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}$. Pongamos $X \coloneqq \{1, \ldots, m\}$, $\nu\colon 2^X \to [0, 1]$,

$$\nu(Y) \coloneqq \sum_{k \in Y} \lambda_k,$$

y definimos $f\colon X \to \mathbb{R}$,

$$f(k) \coloneqq v_k.$$

Demostrar que

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k v_k = \int\limits_X f \, \mathrm{d}\nu.$$

74 Ejercicio (la desigualdad finita de Jensen se puede ver como un corolario de la desigualdad integral de Jensen)**.** Demostrar la desigualdad del Ejercicio 26 usando el Ejercicio 73 y la desigualdad integral de Jensen del Ejercicio 70.