Álgebras de Banach conmutativas

algunos problemas posibles para examen

La lista no es completa.

1 Ejercicio. Estudiar el concepto del radical del álgebra (para álgebras de Banach conmutativas con identidad).

$$R(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A}\colon \quad \forall \varphi \in \Omega(\mathcal{A}) \qquad \varphi(a) = 0\}.$$

Encontrar $R(\mathcal{A})$ para varios ejemplos de álgebras. Demostrar que $R(\mathcal{A}) = \{0_{\mathcal{A}}\}$ si, y solo si, la transformada de Gelfand Γ es inyectiva.

2 Ejercicio.

$$\widehat{f}_k \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-ki\theta}\, d\theta.$$

$$\mathcal{A} \coloneqq \{f \in C(\mathbb{T})\colon \quad \forall k < 0 \qquad \widehat{f}_k = 0\}.$$

Consideramos $\mathcal{A}$ con la norma-supremo sobre $\mathbb{T}$. Mostrar que $\mathcal{A}$ es una subálgebra cerrada con identidad de $C(\mathbb{T})$.

Recordemos que $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ es el álgebra del disco. Definimos

$$\Lambda\colon \mathcal{A}(\mathbb{D}) \to \mathcal{A}, \qquad \Lambda(g) \coloneqq g|_{\mathbb{T}}.$$

Demostrar que Λ es un isomorfismo isométrico.

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{A}) = ?, \qquad \Omega(\mathcal{A}) = ?.$$

Consideremos $f(t) \coloneqq t$. Encontrar $\operatorname{Sp}_{\mathcal{A}}(f)$ y $\operatorname{Sp}_{C(\mathbb{T})}(f)$.

3 Ejercicio. Encontrar dos álgebras de Banach conmutativas con identidad $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ tales que $\Omega(\mathcal{A}_1)$ y $\Omega(\mathcal{A}_2)$ sean homeomorfos, pero que $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ no sean isomorfas.

4 Ejercicio. Consideramos el álgebra de Banach con identidad $C^1([0,1])$, con la norma

$$\|f\|_{C^1} \coloneqq \|f\|_{\text{máx}} + \|f'\|_{\text{máx}}.$$

A. Denotemos por g la función identidad (por supuesto, esta función no es la identidad del álgebra $C^1([0,1])$):

$$g(t) \coloneqq t.$$

Demostrar que esta función es un generador de $C^1([0,1])$. En otras palabras, demostrar que las funciones polinomiales forman un subconjunto denso en $C^1([0,1])$.

B. Para cada t en $[0,1]$, denotamos por φ_t el funcional de evaluación en t:

$$\varphi_t \colon C^1([0,1]) \to \mathbb{C}, \qquad \varphi_t(f) \coloneqq f(t).$$

Es fácil ver que φ_t es un caracter de $C^1([0,1])$. Demostrar que cada caracter de $C^1([0,1])$ es de esta forma.

C. Demostrar que la función $t \mapsto \varphi_t$ es un homeomorfismo de $[0,1]$ sobre $\Omega(C^1([0,1]))$.

5 Ejercicio (Simonenko)**.** Sea K un compacto y sean $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ álgebras de Banach conmutativas con identidad (y con sus propias normas) tales que $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq C(K)$ y $\mathcal{A}_1$ forma un subconjunto denso en $\mathcal{A}_2$:

$$\operatorname{clos}_{\mathcal{A}_2}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_2.$$

Supongamos que

$$\Omega(\mathcal{A}_1) = \{\operatorname{eval}_t \colon t \in K\}.$$

Demostrar que

$$\Omega(\mathcal{A}_2) = \{\operatorname{eval}_t \colon t \in K\}.$$

Aplicación: $C^1(\mathbb{T}) \subseteq W(\mathbb{T}) \subseteq C(\mathbb{T})$.

6 Ejercicio. Describir el conjunto de los caracteres del álgebra $c(\mathbb{N})$. Camino barato: usar el resultado sobre los caracteres en $C(X)$. Sugiero realizar también otro camino: no usar el resultado sobre los caracteres en $C(X)$.

7 Ejercicio. Demostrar que en el álgebra $\ell^\infty(\mathbb{N})$ los funcionales de evaluación son caracteres. Demostrar que existen otros caracteres.

8 Ejercicio. Sea H un espacio de Hilbert. ¿Existen funcionales lineales multiplicativos en $\mathcal{B}(H)$?

9 Ejercicio. Sea $\mathbb{B}^n$ la bola unitaria (abierta) en $\mathbb{C}^n$. Denotemos por $\mathcal{A}(\mathbb{B}^n)$ al *álgebra de la bola*, la cual consiste de todas las funciones holomorfas en $\mathbb{B}^n$ tales que se pueden extender continuamente a la bola unitaria cerrada $\overline{\mathbb{B}^n}$. Es claro que $\mathcal{A}(\mathbb{B}^n)$ es un álgebra de Banach con la norma $\|\cdot\|_{\sup}$ y las operaciones puntuales. Muestre que

$$\Omega(\mathcal{A}(\mathbb{B}^n)) = \{\operatorname{eval}_z \colon z \in \overline{\mathbb{B}^n}\}.$$

10 Ejercicio. Sea $\mathcal{A} = C^{\mathbb{R}}([0,1])$ el álgebra de todas las funciones continuas en $[0,1]$ con valores en $\mathbb{R}$, con la norma $\|\cdot\|_{\text{máx}}$. Definimos $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(f) := \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Muestre que $\varphi(f) \neq 0$ siempre que f es invertible, pero que φ no es multiplicativo.

11 Ejercicio. Consideramos el álgebra del disco y su elemento generador g, $g(z) := z$. Calcular el espectro de g de dos maneras:

A. Solución simple. Usar la teoría de Gelfand y la descripción conocida del espacio de caracteres del álgebra del disco.

B. Solución más complicada (vale más): no usar la teoría de Gelfand.

12 Ejercicio. Consideramos el álgebra de convolución $\ell^1(\mathbb{Z})$ y su elemento e_1, donde

$$e_1 = \left[\delta_{j,1}\right]_{j\in\mathbb{Z}} = (\ldots, 0, 0, 0, \underbrace{1}_{\text{posición } 1}, 0, 0, \ldots).$$

Calcular el espectro de e_1 de dos maneras:

A. Solución simple. Usar la teoría de Gelfand y la descripción conocida del espacio de caracteres del álgebra $\ell^1(\mathbb{Z})$.

B. Solución más complicada (vale más): no usar la teoría de Gelfand.

En los siguientes dos ejercicios se trata de la suma y el producto de dos subconjuntos de $\mathbb{C}$. Se definen de la siguiente manera:

$$X + Y := \{z \in \mathbb{C}: \quad x \in X,\ y \in Y\}, \qquad XY := \{z \in \mathbb{C}: \quad x \in X,\ y \in Y\}.$$

13 Ejercicio. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e, y sean $a, b \in \mathcal{A}$. Mostrar que

$$\operatorname{Sp}(a + b) \subseteq \operatorname{Sp}(a) + \operatorname{Sp}(b).$$

Sugerencia: la teoría de Gelfand da una solución simple. Aún más vale una solución sin usar la teoría de Gelfand.

14 Ejercicio. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e, y sean $a, b \in \mathcal{A}$. Mostrar que

$$\operatorname{Sp}(ab) \subseteq \operatorname{Sp}(a) \operatorname{Sp}(b).$$

Sugerencia: la teoría de Gelfand da una solución simple. Aún más vale una solución sin usar la teoría de Gelfand.

15 Ejercicio. En el álgebra de Banach $\ell^1(\mathbb{Z})$ encontrar un elemento a tal que

$$\|a \mathbin{\Pumpkin} a\|_1 \neq \|a\|_1^2.$$

Demostrar que la transformada de Gelfand de esta álgebra no es isométrica.

16 Ejercicio. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras de Banach conmutativas con identidades. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son isomorfas, entonces $\Omega(\mathcal{A})$ y $\Omega(\mathcal{B})$ son homeomorfos.

1. Tareas adicionales

Aquí están problemas más complicados que no pueden venir en el examen, pero sirven como tareas adicionales.

17 Ejercicio. Estudiar el concepto de la compactificazión de Stone-Čech.

18 Ejercicio. ¿Es posible construir un funcional lineal multiplicativo en el álgebra de Banach conmutativa $L^\infty([0,1])$?

19 Ejercicio. Estudiar el concepto del *número de vueltas* para funciones de clase $C(\mathbb{T},\mathbb{C})$ que no se anulan.

20 Ejercicio. Sea $f \in C(\mathbb{T})$, $f(t) = t$. Demostrar que no existe $g \in C(\mathbb{T})$ tal que $f = \exp(g)$.