# Operadores lineales acotados en espacios de Banach

**Problemas para examen**

## Definición de operadores lineales acotados

Sean $X, Y$ espacios normados. Suponemos que $X$ es no nulo: $X \neq \{0_X\}$. Denotamos por $\mathcal{B}(X, Y)$ al conjunto de los operadores lineales acotados $X \to Y$.

**1 Ejercicio.** Sea $T\colon X \to Y$ un operador lineal. Demostrar la equivalencia de cuatro fórmulas para la norma de $\|T\|$.

**2 Ejercicio.** Sea $T\colon X \to Y$ un operador lineal. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- $\|T\| < +\infty$.
- $T$ es una función Lipschitz continua.
- $T$ es una función uniformemente continua.
- $T$ es una función continua.
- $T$ es una función continua en el punto $0_X$.
- $T$ es una función continua en algún punto de $X$.
- $T(B(0_X, 1))$ es un conjunto acotado en $Y$.

**3 Ejercicio.** Demostrar que el espacio $\mathcal{B}(X, Y)$, dotado de la norma de operadores, es un espacio normado.

**4 Ejercicio.** Sean $X, Y, Z$ espacios normados y sean $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $U \in \mathcal{B}(Y, Z)$. Denotemos por $UT$ a la composición $U \circ T$. Demostrar que $UT \in \mathcal{B}(X, Z)$ y $\|UT\| \leq \|U\| \, \|T\|$.

**5 Ejercicio.** Sea $X$ un espacio normado y sea $Y$ un espacio de Banach. Demostrar que $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio de Banach.

## Ejemplos de operadores lineales

**6 Ejercicio** (el operador de multiplicación en el espacio de sucesiones)**.** Sea $p \in [1, +\infty)$ y sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Definimos $M_a \colon \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ mediante la regla $M_a x \coloneqq ax$, esto es,

$$M_a x \coloneqq (a_k x_k)_{k \in \mathbb{N}}.$$

Calcular $M_a e_p$, donde $e_p = (\delta_{p,k})_{k \in \mathbb{N}}$. Demostrar que $\|M_a\| = \|a\|_\infty$.

**7 Ejercicio.** Sea $p \in [1, +\infty)$ y sean $a, b \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Demostrar que $M_{1_\mathbb{N}} = I$ y $M_a M_b = M_{ab}$, donde $1_\mathbb{N}$ es la sucesión constante 1 y $ab$ es el producto de las sucesiones $a$ y $b$ por componentes.

**8 Ejercicio.** Sea $p \in [1, +\infty)$ y sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Denotemos por $M_a$ al operador del Ejercicio 6. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $M_a$ es invertible;

(b) $\operatorname{ínf}_{k \in \mathbb{N}} |a_k| > 0$;

(c) $0 \notin \operatorname{cl}(a[\mathbb{N}])$.

Aquí $a[\mathbb{N}]$ es la imagen de la función $a$, esto es, $a[bN] = \{a_k \colon\ k \in \mathbb{N}\}$.

**9 Ejercicio.** Sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Definimos $M_a \colon \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ mediante la regla

$$M_a x \coloneqq (a_k x_k)_{k \in \mathbb{N}}.$$

Encontrar $\|M_a\|$.

**10 Ejercicio** (los operadores de desplazamiento en el espacio de sucesiones bilaterales)**.** Sea $p \in [1, +\infty)$. Recordar las definiciones de los operadores de desplazamiento a la izquierda y a la derecha en el espacio $\ell^p(\mathbb{Z})$. Los denotemos por $L$ y $R$, respectivamente. Calcular $Le_p$ y $Re_p$. Demostrar que estos operadores son invertibles e isométricos. En otras palabras, estos operadores son automorfismos isométricos del espacio $\ell^p(\mathbb{Z})$.

**11 Ejercicio** (los operadores de desplazamiento en el espacio de sucesiones)**.** Sea $p \in [1, +\infty)$. Recordar las definiciones de los operadores de desplazamiento a la izquierda y a la derecha en el espacio $\ell^p(\mathbb{N})$. Los denotemos por $L$ y $R$, respectivamente. Estos operadores son distintos de los operadores del Ejercicio 10, porque tienen otro dominio y codominio. Calcular las normas $\|L\|$ y $\|R\|$ y los productos $LR$ y $RL$. Determinar, si alguno de estos operadores es isométrico. Para cada uno de estos dos operadores, calcular el núcleo y la imagen. Para cada uno de estos dos operadores, determinar si tiene la propiedad inyectiva o suprayectiva.

**12 Ejercicio** (el operador integral con el núcleo integral acotado, en espacios de medida finita)**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, $\mu(X) < +\infty$, $\nu(Y) < +\infty$, y sea $K \in L^\infty(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \otimes \nu)$. Sea $p \in [1, +\infty]$. Definimos $A_K \colon L^p(X, \mu) \to L^p(Y, \nu)$ mediante la siguiente regla:

$$(A_K f)(x) \coloneqq \int_Y K(x, y) f(y) \, \mathrm{d}\nu(y).$$

Demostrar que el operador $A_K$ es acotado.

**13 Ejercicio** (un caso particular de la prueba de Schur para los operadores integrales)**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida $\sigma$-finita y sea $K \colon X \times Y \to \mathbb{C}$ una función $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-medible. Supongamos que

$$C_1 \coloneqq \sup_{x \in X} \int_Y |K(x, y)| \, \mathrm{d}\nu(y) < +\infty, \qquad C_2 \coloneqq \sup_{y \in Y} \int_X |K(x, y)| \, \mathrm{d}\mu(x) < +\infty.$$

Definimos $A_K \colon L^2(X, \mu) \to L^2(Y, \nu)$ mediante la siguiente regla:

$$(A_K f)(x) \coloneqq \int_Y K(x, y) f(y) \, \mathrm{d}\nu(y). \tag{1}$$

Demostrar que la integral en (1) existe en el sentido de Lebesgue para c.t.p. $x$ en $X$, esto es, $\mu(M) = 0$, donde

$$M \coloneqq \left\{ x \in X \colon \quad \int_Y |K(x, y)| \, |f(y)| \, \mathrm{d}\nu(y) = +\infty \right\}.$$

Demostrar que $A$ es acotado y $\|A_K\| \le \sqrt{C_1 C_2}$.

## Funcionales lineales acotados

Dado un espacio normado (real o complejo) $V$, denotamos por $V^*$ al conjunto de todos los funcionales lineales acotados definidos en $V$. En otras palabras, $V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$, si $V$ es complejo, y $V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{R})$, si $V$ es real.

**14 Ejercicio.** Escribir 4 fórmulas equivalentes para la norma del funcional lineal.

**15 Ejercicio.** Sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal. Mostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- $\|f\| < +\infty$.
- $f$ es una función Lipschitz continua.
- $f$ es una función uniformemente continua.
- $f$ es una función continua.
- $f$ es una función continua en el punto $0_V$.
- $f$ es una función continua en algún punto de $V$.

**16 Ejercicio.** Sea $V$ un espacio normado. Demostrar que el espacio $V^*$ es de Banach.

**17 Ejercicio** (el lema principal para el teorema de Hahn–Banach)**.** Sean $V$ un espacio normado real, $W$ un subespacio de $V$, $u \in V \setminus W$, $f \in W^*$. Demostrar que existe $F \in (W + \mathbb{R}u)^*$ tal que $F|_W = f$ y $\|F\| = \|f\|$.

**18 Ejercicio.** Demostrar directamente la siguiente afirmación, similar a una parte de la demostración del teorema de Hahn–Banach. Sea $V$ un espacio normado real, sea $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subespacios de $V$ y sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $f_k \in \mathcal{B}(S_k, \mathbb{R})$ para cada $k$ en $\mathbb{N}$. Supongamos que $C > 0$ y

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|f_k\| \le C.$$

Pongamos

$$W := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k.$$

I. Mostrar que $W$ es un subespacio de $V$.

II. Explicar cómo definir $g\colon W \to \mathbb{R}$ tal que $g|_{S_k} = f_k$ para cada $k$ en $\mathbb{N}$.

III. Mostrar que $g \in \mathcal{B}(W,\mathbb{R})$ y $\|g\| \le C$.

**19 Ejercicio.** Enunciar y demostrar el teorema de Hahn–Banach para el caso real.

**20 Ejercicio.** Enunciar el teorema de Hahn–Banach para espacios normados complejos. Mostrar como deducirlo del teorema de Hahn–Banach para espacios normados reales.

**21 Ejercicio.** Demostrar el siguiente corolario del teorema de Hahn–Banach. Dado un vector $v$ en $V \setminus \{0_V\}$, existe $f$ en $V^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(v) = \|v\|$.

**22 Ejercicio.** Sea $V$ un espacio normado y sean $v, u$ en $V$ tales que $v \ne u$. Demostrar que existe $f$ en $V^*$ tal que $f(v) \ne f(u)$.

**23 Ejercicio.** Sea $W$ un subespacio cerrado de $V$ y sea $u \in V \setminus W$. Demostrar que existe $f$ en $V^*$ tal que $f(u) \ne 0$ y $f(w) = 0$ para cada $w$ en $W$.

**24 Ejercicio.** Demostrar el siguiente corolario del teorema de Hahn–Banach: dada una lista $v_1, \ldots, v_m$ linealmente independiente de vectores en $V$, existe una lista de funcionales $f_1, \ldots, f_m$ en $V^*$ tal que $f_j(v_k) = \delta_{j,k}$ para cualesquiera $j, k$ en $\{1, \ldots, m\}$.

**25 Ejercicio** (el encaje canónico de un espacio normado en su espacio bidual)**.** Sea $V$ un espacio vectorial normado. Recordar la definición del espacio bidual $V^{**}$. Definimos $\Lambda\colon V \to V^{**}$ mediante la siguiente regla:

$$\Lambda(v)(f) := f(v) \qquad (v \in V,\ f \in V^*).$$

Demostrar que $\Lambda$ es una isometría lineal.

**26 Ejercicio.** Si la función $\Lambda$ del ejercicio anterior es suprayectiva, se dice que el espacio $V$ es *reflexivo*. Como $V^{**}$ siempre es completo, cada espacio normado reflexivo es completo. Recordar ejemplos de espacios reflexivos. Recordar al menos un ejemplo de espacio no reflexivo.

## Teoremas de la transformación lineal abierta y de la gráfica cerrada

**27 Ejercicio.** Recordar la definición de espacios de Baire. Recordar el teorema de Baire. Mostrar el siguiente corolario del teorema de Baire. Sea $X$ un espacio métrico completo no vacío y sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de $X$ tal que $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Entonces existe un $k$ en $\mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(E_k)) \neq \varnothing$.

**28 Ejercicio.** Sea $X, Y$ espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Supongamos que existe $r > 0$ tal que $B_Y(0, 1) \subseteq T[rB_X(0, 1)]$. Demostrar que la función $T$ es abierta.

**29 Ejercicio.** Sea $Y$ un espacio normado y sean $P, Q$ subconjuntos de $Y$. Demostrar que

$$\operatorname{cl}(P) + \operatorname{cl}(Q) \subseteq \operatorname{cl}(P + Q).$$

**30 Ejercicio** (teorema de la trasnformación lineal abierta)**.** Sean $X, Y$ espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que $T(X) = Y$. Demostrar que la función $T$ es abierta.

**31 Ejercicio.** Sean $X, Y$ espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ una transformación lineal continua y biyectiva. Demostrar que su inversa también es continua.

**32 Ejercicio.** Sea $X$ un espacio vectorial y sean $N_1$ y $N_2$ dos normas en $X$ tales que los espacios $(X, N_1)$ y $(X, N_2)$ son completos, y la norma $N_2$ se domina por $N_1$, es decir, existe $C > 0$ tal que para cada $x$ en $V$ se cumple la desigualdad $N_2(x) \leq CN_1(x)$. Demostrar que las normas $N_1$ y $N_2$ son equivalentes.

**33 Ejercicio.** Sean $X, Y$ espacios vectoriales y sea $T: X \to Y$ una transformación lineal. Recordar la definición de la gráfica de $T$ y demostrar que la gráfica de $T$ es un subespacio del espacio vectorial $X \times Y$.

**34 Ejercicio.** Sean $X, Y$ espacios normados. Recordar la definición de su $p$-suma $X \oplus^p Y$. Demostrar que las proyecciones naturales $\pi_1: X \oplus^p Y \to X$ y $\pi_2: X \oplus^p Y \to Y$ son continuas y abiertas.

**35 Ejercicio.** Enunciar y demostrar el teorema de la gráfica cerrada para transformaciones lineales en espacios de Banach.

## El principio de acotación uniforme

Los resultados de los Ejercicios 36 y 37 fueron obtenidos por Banach y Steinhaus.

**36 Ejercicio.** Enunciar y demostrar el principio de acotación uniforme para colecciones en $\mathcal{B}(X, Y)$, donde $X$ es un espacio de Banach, $Y$ es un espacio normado.

**37 Ejercicio.** Demostrar el siguiente corolario del principio de acotación uniforme. Sean $X$ un espacio de Banach, $Y$ un espacio normado, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{B}(X, Y)$ que converge puntualmente, esto es, para cada $x$ en $X$ existe un vector $S(x)$ en $Y$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(x) - S(x)\|_Y = 0.$$

Demostrar que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty,$$

$S \in \mathcal{B}(X, Y)$ y

$$\|S\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|.$$

Sugerencia: mostrar que el principio de acotación uniforme se puede aplicar al conjunto $\{T_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$.

**38 Ejercicio.** Sea $X$ un espacio de Banach y sea $A$ un subconjunto de $X$. Demostrar que las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

(a) el conjunto $A$ es acotado;

(b) para cada $f$ en $X^*$, el conjunto $f[A]$ es acotado.

Se recomienda combinar el principio de acotación uniforme con el Ejercicio 25.

**39 Ejercicio.** Sean $X$, $Y$ espacios de Banach sea $F$ un subconjunto de $\mathcal{B}(X, Y)$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) el conjunto $F$ es acotado en $\mathcal{B}(X, Y)$, esto es,

$$\sup_{T\in F} \|T\| < +\infty;$$

(b) para cada $x$ en $X$ y cada $f$ en $Y^*$, el conjunto $\{f[Tx]\colon\ T \in F\}$ es acotado en $\mathbb{C}$.

Se recomienda combinar el resultado del Ejercicio 38 con el principio de acotación uniforme.

## El grupo de operadores lineales acotados invertibles en un espacio de Banach

Sea $X$ un espacio de Banach. Denotemos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ al conjunto de los elementos invertibles en el álgebra $\mathcal{B}(X)$ y por $\operatorname{inv}\colon \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \mathcal{B}(X)$ a la operación de inversión.

**40 Ejercicio.** Demostrar que $\mathcal{B}(X)$ es una álgebra compleja asociativa con identidad, que es un espacio normado complejo, que la norma tiene la siguiente propiedad *submultiplicativa*:

$$\|ST\| \le \|S\|\,\|T\|,$$

y que $\|I\| = 1$. Por definición, esto significa que $\mathcal{B}(X)$ es una *álgebra de Banach con identidad*.

**41 Ejercicio.** Demostrar que $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ es un grupo.

**42 Ejercicio** (sobre la serie de Neumann)**.** Sea $A \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|A\| < 1$. Demostrar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ converge, $I - A \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, y

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Más aún, demostrar que

$$\|(I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}, \qquad \|(I - A)^{-1} - I\| \le \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}.$$

**43 Ejercicio.** Usando el resultado del Ejercicio 42 explicar que $I$ pertenece al interior del conjunto $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, y la función inv es continua en el punto $I$.

**44 Ejercicio.** Sea $S \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ y sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que

$$\|T - S\| < \frac{1}{\|S^{-1}\|}.$$

Demostrar que $T \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ y

$$\|T^{-1} - S^{-1}\| \le \frac{\|T - S\|\,\|S^{-1}\|^2}{1 - \|T - S\|\,\|S^{-1}\|}.$$

Sugerencia: escribir $T$ como

$$T = S - (S - T) = S(I - S^{-1}(S - T)) \tag{2}$$

**45 Ejercicio.** Demostrar que el conjunto $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ es abierto y la función inv es continua. Primer método: usar los resultados del Ejercicio 44. Segundo método: usar la formula (2) y los resultados del Ejercicio 43.

## El espectro de un operador lineal acotado

Sea $X$ un espacio de Banach. Dado $S$ en $\mathcal{B}(X)$, el *espectro* de $S$ se define mediante la fórmula

$$\operatorname{Sp}(S) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ \lambda I - S \notin \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))\}.$$

Dado $S$ en $\mathcal{B}(X)$, la *función resolvente* de $S$ es $R_S\colon \mathbb{C}\setminus\operatorname{Sp}(S)\to\mathcal{B}(X)$,

$$R_S(\lambda) := (\lambda I - S)^{-1}.$$

**46 Ejercicio.** Sea $S \in \mathcal{B}(X)$. Demostrar que si $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > \|S\|$, entonces $\lambda \notin \operatorname{Sp}(S)$ y

$$\|R_S(\lambda)\| \le \frac{1}{|\lambda| - \|S\|}.$$

Por consecuencia, el conjunto $\operatorname{Sp}(S)$ es acotado y

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|R_S(\lambda)\| = 0.$$

**47 Ejercicio.** Sea $S \in \mathcal{B}(X)$. Demostrar que el conjunto $\operatorname{Sp}(S)$ es cerrado.

**48 Ejercicio.** Sea $S \in \mathcal{B}(X)$. Demostrar que la función $R_S$ es continua.

**49 Ejercicio.** Sea $S \in \mathcal{B}(X)$ y sean $\lambda, \nu \in \mathbb{C}\setminus\operatorname{Sp}(S)$. Demostrar que

$$R_S(\lambda) - R_S(\nu) = -(\lambda-\nu)R_S(\lambda)R_S(\nu) = -(\lambda-\nu)R_S(\nu)R_S(\lambda).$$

Por consecuencia, $R_S(\lambda)$ y $R_S(\nu)$ conmutan.

**50 Ejercicio.** Sean $S \in \mathcal{B}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\operatorname{Sp}(S)$. Demostrar que

$$\lim_{\nu\to\lambda} \frac{R_S(\nu) - R_S(\lambda)}{\nu-\lambda} = -(R_S(\lambda))^2.$$

**51 Ejercicio.** Sean $S \in \mathcal{B}(X)$, $\varphi \in \mathcal{B}(X)^*$. Definimos $f\colon \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(S) \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$f(\lambda) \coloneqq \varphi(R_S(\lambda)).$$

Demostrar que la función $f$ es holomorfa y

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0.$$

**52 Ejercicio** (el teorema de Gelfand que el espectro es no vacío)**.** Sea $S \in \mathcal{B}(X)$. Demostrar que $\operatorname{Sp}(S) \neq \varnothing$.

**53 Ejercicio** (la función resolvente es analítica)**.** Sea $S \in \mathcal{B}(X)$ y sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(S)$. Encontrar un número $r > 0$ y una sucesión $(A_k)_{k=0}^{\infty}$ en $\mathcal{B}(X)$ tales que para cada $\nu$ en $\mathbb{C}$ con $|\nu - \lambda| < r$ se cumple

$$R_S(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} (\nu - \lambda)^k A_k.$$

Sugerencia: usar la serie de Neumann.

## Ejemplos del cálculo del espectro

**54 Ejercicio.** Sea $p \in [1, +\infty)$. Calcular el espectro de los operadores de desplazamiento a la izquierda y a la derecha en el espacio $\ell^p(\mathbb{Z})$. Ya conocimos a estos operadores en el Ejercicio 10.

**55 Ejercicio.** Sea $p \in [1, +\infty)$. Calcular el espectro del operador $L$ de desplazamiento a la izquierda en el espacio $\ell^p(\mathbb{N})$. Ya conocimos este operador en el Ejercicio 11. Se recomienda el siguiente plan.

- Dado $\lambda$ en $\mathbb{C}$ con $|\lambda| < 1$, encontrar una sucesión $x$ en $\ell^p(\mathbb{N})$ tal que

  $$Lx = \lambda x.$$

  Se trata de encontrar una solución no trivial de un sistema infinito de ecuaciones lineales homogéneas.

- Usando el resultado del inciso anterior, concluir que para $|\lambda| < 1$ el operador $\lambda I - L$ no es inyectivo y no es invertible.

- Usando el resultado del inciso anterior concluir que $\mathbb{D} \subseteq \operatorname{Sp}(L)$.

- Usando el hecho que $\|L\| = 1$, concluir que $\mathrm{Sp}(L) \subseteq \mathrm{cl}(\mathbb{D})$.

- Usando los resultados de los incisos anteriores y el resultado del Ejercicio 47, encontrar $\mathrm{Sp}(L)$.

**56 Ejercicio.** Sea $p \in [1, +\infty)$. Calcular el espectro del operador $R$ de desplazamiento a la derecha en el espacio $\ell^p(\mathbb{N})$. Ya conocimos este operador en el Ejercicio 11. Se recomienda el siguiente plan.

- Dado $\lambda$ en $\mathbb{C}$ con $0 < |\lambda| < 1$, mostrar que no existe ninguna sucesión $x$ en $\ell^p(\mathbb{N})$ tal que $Rx = e_1$. Sugerencia: convertir la ecuación $Rx = e_1$ como un sistema infinito de ecuaciones lineales, y mostrar que si una sucesión satisface este sistema de ecuaciones, entonces no pertenece al espacio $\ell^p(\mathbb{N})$.

- Usando el resultado del inciso anterior, concluir que para $0 < |\lambda| < 1$ el operador $\lambda I - R$ no es sobre y por eso no es invertible.

- Mostrar que el operador $R$ no es sobre.

- Usando los resultados de los incisos anteriores, concluir que $\mathbb{D} \subseteq \mathrm{Sp}(R)$.

- Usando el hecho que $\|R\| = 1$, concluir que $\mathrm{Sp}(R) \subseteq \mathrm{cl}(\mathbb{D})$.

- Usando los resultados de los incisos anteriores y el resultado del Ejercicio 47, encontrar $\mathrm{Sp}(R)$.

**57 Ejercicio.** Sean $p \in [1, +\infty)$, $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Calcular el espectro del operador de multiplicación $M_a$ definido en el Ejercicio 6.