Temas preliminares de Análisis Matemático II

Problemas para examen

Usamos la notación $A \subset B$ en el siguiente sentido en el sentido que A es un subconjunto de B, sin excluir el caso $A = B$.

Propiedades de las operaciones con conjuntos

1. La unión de dos conjuntos contiene a cada uno de los conjuntos originales. Sean A, B algunos conjuntos. Demuestre que

$$A \subset A \cup B.$$

De manera similar se demuestra que $B \subset A \cup B$.

2. La unión de dos conjuntos es el conjunto más pequeño entre todos los conjuntos que contienen a cada uno de los conjuntos originales. Sean A, B, C algunos conjuntos tales que $A \subset C$ y $B \subset C$. Demuestre que

$$A \cup B \subset C.$$

3. La intersección de dos conjuntos está contenida en cada uno de los conjuntos origionales. Sean A, B algunos conjuntos. Demuestre que

$$A \cap B \subset A.$$

De manera similar se demuestra que $A \cap B \subset B$.

4. La intersección de dos conjuntos es el conjunto más grande entre todos los conjuntos contenidos en cada uno de los conjuntos originales. Sean A, B, C algunos conjuntos tales que $C \subset A$ y $C \subset B$. Demuestre que

$$C \subset A \cap B.$$

5. Criterio de que un conjunto está contenido en el otro. Sean A y B conjuntos. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $A \subset B$; (ii) $A \cap B = A$; (iii) $A \cup B = B$; (iv) $A \setminus B = \varnothing$.

6. Sean A y B algunos conjuntos. Demuestre que

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

7. Las leyes distributivas. Sean A, B, C conjuntos. Demuestre que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

8. Leyes de De Morgan. Sean A, B, C conjuntos. Demuestre que

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B), \qquad C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

9. Dos definiciones de la diferencia simétrica. Sean A y B conjuntos. Demuestre que

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

El conjunto que está en ambos lados de la igualdad se llama la *diferencia simétrica* de A y B y se denota por $A \triangle B$.

10. La "desigualdad del triángulo" para la diferencia simétrica. Sean A, B, C conjuntos. Demuestre que

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B).$$

11. La propiedad asociativa de la diferencia simétrica. Sean A, B, C conjuntos. Demuestre que

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

Propiedades de las operaciones con familias de conjuntos

12. La unión de una familia de conjuntos contiene a cada uno de los conjuntos de esta familia. Sea $(A_i)_{i\in J}$ una familia de conjuntos y sea $k \in J$. Demostrar que

$$A_k \subset \bigcup_{i\in J} A_i.$$

13. La intersección de una familia de conjuntos está contenida en cada uno de los conjuntos de esta familia. Sea $(A_i)_{i\in J}$ una familia de conjuntos y sea $k \in J$. Demostrar que

$$\bigcap_{i\in J} A_i \subset A_k.$$

14. La unión de una familia de conjuntos es el conjunto más pequeño entre los conjuntos que contienen a cada uno de los elementos de esta familia. Sea $(A_i)_{i\in J}$ una familia de conjuntos y sea C un conjunto tal que

$$\forall i \in J \qquad A_i \subset C.$$

Demuestre que

$$\bigcup_{i\in J} A_i \subset C.$$

15. La intersección de una familia de conjuntos es el conjunto más grande entre los conjuntos que están contenidos en cada uno de los elementos de esta familia. Sea $(A_i)_{i\in J}$ una familia de conjuntos y sea C un conjunto tal que

$$\forall i \in J \qquad C \subset A_i.$$

Demuestre que

$$C \subset \bigcap_{i\in J} A_i.$$

16. Criterio de que un conjunto contiene a la unión de una familia de conjuntos. Sea $(A_i)_{i\in J}$ una familia de conjuntos y sea B un conjunto. Demuestre que

$$\bigcup_{i\in J} A_i \subset B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i \in J \quad A_i \subset B.$$

17. Criterio de que un conjunto está contenido en la intersección de una familia de conjuntos. Sea $(A_i)_{i\in J}$ una familia de conjuntos y sea B un conjunto. Demuestre que

$$B \subset \bigcap_{i\in J} A_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i \in J \quad B \subset A_i.$$

18. La propiedad distributiva de la intersección respecto a la unión. Sea A un conjunto y sea $(B_i)_{i\in J}$ una familia de conjuntos. Demuestre que

$$A \cap \left(\bigcup_{i\in J} B_i \right) = \bigcup_{i\in J} (A \cap B_i).$$

19. La propiedad distributiva de la unión respecto a la intersección. Sea A un conjunto y sea $(B_i)_{i\in J}$ una familia de conjuntos. Demuestre que

$$A \cup \left(\bigcap_{i\in J} B_i \right) = \bigcap_{i\in J} (A \cup B_i).$$

20. Las leyes de De Morgan para familias de conjuntos. Sea C un conjunto y sea $(B_i)_{i\in J}$ una familia de conjuntos. Demuestre que

$$C \setminus \left(\bigcup_{i\in J} B_i \right) = \bigcap_{i\in J} (C \setminus B_i), \qquad C \setminus \left(\bigcap_{i\in J} B_i \right) = \bigcup_{i\in J} (C \setminus B_i).$$

Estructura de sucesiones monótonas de conjuntos

21. Lema (sobre una sucesión creciente de conjuntos y los índices de pertenencia). Sea A_1, A_2, A_3 una sucesión creciente de conjuntos y sea $x \in A_k$. Denotemos por J al conjunto de los índices n tales que $x \in A_n$:

$$J \coloneqq \Big\{ n \in \{1, 2, \ldots\} \colon\ x \in A_n \Big\}.$$

Demuestre que:

1. $J \neq \varnothing$.
2. J tiene un único elemento mínimo que denotemos por p.
3. $p \leq k$.
4. $J = \{ j \in \mathbb{Z} \colon\ j \geq p \}$.

22. Teorema (sobre la sucesión de las diferencias consecutivas de una sucesión creciente de conjuntos). Sea $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ una sucesión creciente de conjuntos que empieza con el conjunto vacío:

$$\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$

Denotemos por $D_1, D_2, D_3, \ldots$ a las siguientes diferencias:

$$D_k = A_k \setminus A_{k-1} \qquad (k \in \{1, 2, \ldots\}).$$

I. Demuestre que la sucesión $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta: si $j, k \in \mathbb{N}$ y $j < k$, entonces $D_j \cap D_k = \varnothing$.

II. Demuestre que para cada n en $\mathbb{N}$,

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} D_k \qquad (n \in \{1, 2, \ldots\}).$$

Sugerencia: utilice el Lema 21 o demuestre la fórmula por inducción matemática sobre n.

III. Demuestre que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Sugerencia: utilice el resultado del inciso II.

23. Pasar de una sucesión arbitraria de conjuntos a una sucesión creciente y luego a una sucesión disjunta. Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos. Para todo $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ pongamos

$$B_k := \bigcup_{n=1}^{k} A_n,$$

y para todo $k \in \{1, 2, \ldots\}$ pongamos

$$D_k := B_k \setminus B_{k-1}.$$

Demuestre que:

1. La sucesión $(B_k)_{k=0}^{\infty}$ es creciente y $B_0 = \varnothing$.
2. La sucesión $(D_k)_{k=1}^{\infty}$ es disjunta.
3. Para todo $k \in \{1, 2, \ldots\}$,
$$D_k = A_k \setminus B_{k-1}.$$
4. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j.$

24. Lema (de una sucesión decreciente de conjuntos y los índices de pertenencia). Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots$ una sucesión decreciente de conjuntos, $k \in \{1, 2, \ldots\}$ y $x \in A_k$. Denotemos por J al conjunto de los índices n tales que $x \in A_n$:

$$J := \Big\{ n \in \{1, 2, \ldots\} : \ x \in A_n \Big\}.$$

Demuestre que:

1. $J \neq \varnothing$.
2. Si $J \neq \{1, 2, \ldots\}$, entonces J tiene un único elemento máximo. Denotando este elemento por p tenemos que $p \geq k$ y
$$J = \{1, \ldots, p\}.$$

25. Teorema (sucesión de las diferencias de una sucesión decreciente de conjuntos). Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots$ una sucesión decreciente de conjuntos:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$

Denotemos por C a la intersección de esta sucesión y por $D_1, D_2, D_3, \ldots$ a las siguientes diferencias:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad D_k = A_k \setminus A_{k+1} \qquad (k \in \{1, 2, \ldots\}).$$

Demuestre que para todo $n \in \{1, 2, \ldots\}$

$$A_n = C \cup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} D_k \right).$$

Propiedades de imágenes y preimágenes de conjuntos bajo funciones

En los siguientes ejercicios X y Y son algunos conjuntos y $f\colon X \to Y$ es una función.

26. Imagen y preimagen del conjunto vacío. Demuestre que

$$f[\varnothing] = \varnothing, \qquad f^{-1}[\varnothing] = \varnothing.$$

27. Monotonía de la preimagen. Sean $B_1, B_2 \subset Y$ tales que $B_1 \subset B_2$. Demuestre que

$$f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2].$$

28. Monotonía de la imagen. Sean $A_1, A_2 \subset X$ tales que $A_1 \subset A_2$. Demuestre que

$$f[A_1] \subset f[A_2].$$

29. Preimagen de la unión. Sean $B_1, B_2 \subset Y$. Demuestre que

$$f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2].$$

30. Preimagen de la intersección. Sean $B_1, B_2 \subset Y$. Demuestre que

$$f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2].$$

31. Imagen de la unión. Sean $A_1, A_2 \subset X$. Demuestre que

$$f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2].$$

32. Imagen de la intersección. Sean $A_1, A_2 \subset X$. Demuestre que

$$f[A_1 \cap A_2] \subset f[A_1] \cap f[A_2].$$

33. Imagen de la preimagen. Sea $B \subset Y$. Demuestre que

$$f[f^{-1}[B]] \subset B.$$

34. Preimagen de la imagen. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $A \subset X$. Demuestre que

$$A \subset f^{-1}[f[A]].$$

En los siguientes ejercicios hay que construir ejemplos con contenciones estrictas.

35. Imagen de la intersección, construir un ejemplo con la contención estricta. Construir conjuntos X, Y, función f y conjuntos $A_1, A_2 \subset X$ tales que $f[A_1 \cap A_2] \subsetneq f[A_1] \cap f[A_2]$.

36. Imagen de la preimagen, construir un ejemplo con la contención estricta. Construya conjuntos X, Y, función f y un conjunto $B \subset Y$ tales que $f[f^{-1}[B]] \subsetneq B$.

37. Preimagen de la imagen, construir un ejemplo con la contención estricta. Construya conjuntos X, Y, función f y un conjunto $A \subset X$ tales que $A \subsetneq f^{-1}[f[A]]$.

Imágenes y preimágenes de familias de conjuntos

En los siguientes ejercicios se supone que X, Y son conjuntos y $f\colon X \to Y$ es una función.

38. Preimagen de la unión de una familia. Sea $(B_i)_{i\in J}$ una familia de conjuntos tales que $B_i \subset Y$ para todo $i \in J$. Demuestre que

$$f^{-1}\left[\bigcup_{i\in J} B_i\right] = \bigcup_{i\in J} f^{-1}[B_i].$$

39. Preimagen de la intersección de una familia. Sea $(B_i)_{i\in J}$ una familia de conjuntos tales que $B_i \subset Y$ para todo $i \in J$. Demuestre que

$$f^{-1}\left[\bigcap_{i\in J} B_i\right] = \bigcap_{i\in J} f^{-1}[B_i].$$

40. Imagen de la unión de una familia. Sea $(A_i)_{i\in J}$ una familia de conjuntos tales que $A_i \subset X$ Demuestre que

$$f\left[\bigcup_{i\in J} A_i\right] = \bigcup_{i\in J} f[A_i].$$

41. Imagen de la intersección de una familia. Sea $(A_i)_{i\in J}$ una familia de conjuntos tales que $A_i \subset X$ para todo $i \in J$. Demuestre que

$$f\left[\bigcap_{i\in J} A_i\right] \subset \bigcap_{i\in J} f[A_i].$$

42. Imagen de la intersección de una familia: construir ejemplo con la contención estricta. Constuya algunos conjuntos X, Y, una función $f\colon X \to Y$ y una familia de conjuntos $(A_i)_{i\in J}$ tales que $A_i \subset X$ para todo $i \in J$ y

$$f\left[\bigcap_{i\in J} A_i\right] \subsetneq \bigcap_{i\in J} f[A_i].$$

Intervalos del eje real

43. Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$(a, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, +\infty \right).$$

44. Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$[a, +\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, +\infty \right).$$

45. Sea $b \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, b - \frac{1}{n} \right].$$

46. Sea $b \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$(-\infty, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, b + \frac{1}{n} \right].$$

47. Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right).$$

Estructura de subconjuntos abiertos del eje real

48. Sea (X, d) un espacio métrico. Escriba la definición de la topología inducida por d.

Definimos la topología en $\mathbb{R}$ por medio de la distancia común $d(x, y) \coloneqq |x - y|$.

49. Lema. Sea A un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Definimos en A la relación binaria $\overset{A}{\sim}$ mediante la siguiente regla:

$$x \overset{A}{\sim} y \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad [x, y] \cup [y, x] \subset A.$$

Demuestre que $\overset{A}{\sim}$ es una relación de equivalencia.

50. Lema. Sea A un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ y sea $x \in A$. Denotemos por $[x]_A$ a la clase de equivalencia de x respecto a la relación binaria $\overset{A}{\sim}$:

$$[x]_A = \{y \in A\colon\ x \overset{A}{\sim} y\}.$$

Pongamos

$$a_x \coloneqq \inf\{y \in (-\infty, x)\colon\ (y, x) \subset A\}, \qquad b_x \coloneqq \sup\{z \in (x, +\infty)\colon\ (x, z) \subset A\}.$$

Demuestre que

$$[x]_A = (a_x, b_x).$$

Sugerencia: 1) demostrar que $a_x < x < b_x$, 2) en la parte $[x]_A \subset (a_x, b_x)$ usar que si $y \overset{A}{\sim} x$, entonces $[y]_A = [x]_A$, $a_y = a_x$, $b_y = b_x$, y y aplicar el inciso 1); 3) en la parte $(a_x, b_x) \subset [x]_A$ usar lemas sobre la comparación del sup e inf con un número.

51. Teorema (estructura de subconjuntos abiertos del eje real). Demuestre que todo conjunto abierto A en $\mathbb{R}$ se puede representar como una unión finita o numerable de intervalos abiertos, disjuntos entre si.

El eje real extendido

52. Definición de la topología en el eje real extendido. Denotemos por $\mathcal{G}$ al conjunto de los intervalos que tienen una de las siguientes tres formas (con $a, b \in \mathbb{R}$):

$$(a, +\infty], \qquad (a, b), \qquad [-\infty, b).$$

Demuestre que para cualesquiera P, Q en $\mathcal{G}$ se tiene que $P \cap Q \in \mathcal{G}$. Hay que considerar todos los casos posibles. Explique cómo se define la topología en $\overline{\mathbb{R}}$.

53. Demuestre que el conjunto $[3, +\infty)$ no es abierto ni cerrado en $\overline{\mathbb{R}}$.

54. ¿Es la adición una operación continua en $[\mathbf{0}, +\boldsymbol{\infty}]$?. Determine si la función $f\colon [0, +\infty] \times [0, +\infty] \to [0, +\infty]$, definida mediante la siguiente regla, es continua o no.

$$f(x, y) \coloneqq \begin{cases} x + y, & \text{si} \quad x, y \in [0, +\infty); \\ +\infty, & \text{si} \quad x = +\infty \ \lor \ y = +\infty. \end{cases}$$

55. ¿Es la multiplicación una operación continua en $[\mathbf{0}, +\boldsymbol{\infty}]$?. Determine si la función $g\colon [0, +\infty] \times [0, +\infty] \to [0, +\infty]$, definida mediante la siguiente regla, es continua o no.

$$g(x, y) \coloneqq \begin{cases} xy, & \text{si} \quad x, y \in [0, +\infty), \\ 0, & \text{si} \quad x = 0, \ y = +\infty, \\ 0, & \text{si} \quad x = +\infty, \ y = 0, \\ +\infty, & \text{si} \quad x = y = +\infty. \end{cases}$$

Supremo e ínfimo de un conjunto

56. Comparación del supremo con un número. Sean $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\sup(A) \le b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \quad a \le b,$$

y

$$\sup(A) \ge b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall u < b \quad \exists a \in A \quad a > u.$$

57. Criterio del supremo en términos de cuantificadores y desigualdades. Sean $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\sup(A) = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall a \in A \quad a \le b, \\ \forall u < b \quad \exists a \in A \quad a > u. \end{cases}$$

Aquí la llave sirve para formar un *sistema* de dos condiciones unidas con la operación lógica $\wedge$.

58. Comparación del ínfimo con un número. Sean $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\inf(A) \ge b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \quad a \ge b,$$

y

$$\inf(A) \le b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall u > b \quad \exists a \in A \quad a < u.$$

59. Criterio del ínfimo en términos de cuantificadores y desigualdades. Sean $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\inf(A) = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall a \in A \quad a \ge b, \\ \forall u > b \quad \exists a \in A \quad a < u. \end{cases}$$

60. Monotonía del supremo. Sean $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$ tales que $A \subset B$. Demuestre que

$$\sup A \le \sup B.$$

61. Monotonía del ínfimo. Sean $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$ tales que $A \subset B$. Demuestre que

$$\inf A \ge \inf B.$$

62. El supremo de la unión de dos conjuntos. Sean $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\sup(A \cup B) = \max\big\{\sup(A), \sup(B)\big\}.$$

63. El ínfimo de la unión de dos conjuntos. Sean $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\inf(A \cup B) = \min\big\{\inf(A), \inf(B)\big\}.$$

64. El supremo de un múltiplo positivo de un conjunto. Sean $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $\lambda \in (0, +\infty)$. Demuestre que

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A).$$

65. El ínfimo de un múltiplo positivo de un conjunto. Sean $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $\lambda \in (0, +\infty)$. Demuestre que

$$\inf(\lambda A) = \lambda \inf(A).$$

66. El supremo del conjunto opuesto. Sea $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

67. El ínfimo del conjunto opuesto. Sea $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\inf(-A) = -\sup(A).$$

68. El supremo de la suma de dos conjuntos. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. Demuestre que

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

69. El ínfimo de la suma de dos conjuntos. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. Demuestre que

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B).$$

70. El supremo de la unión de una familia de conjuntos. Sea $(A_j)_{j \in J}$ una familia no vacía de subconjuntos de $\overline{\mathbb{R}}$. Pongamos

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \qquad C := \{u \in \overline{\mathbb{R}} \colon\ \exists k \in J \quad u = \sup(A_k)\}.$$

Demuestre que $\sup(B) = \sup(C)$.

71. El ínfimo de la unión de una familia de conjuntos. Sea $(A_j)_{j \in J}$ una familia no vacía de subconjuntos de $\overline{\mathbb{R}}$. Pongamos

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \qquad C := \{u \in \overline{\mathbb{R}} \colon\ \exists k \in J \quad u = \inf(A_k)\}.$$

Demuestre que $\inf(B) = \inf(C)$.

El límite superior y el límite inferior de una sucesión

72. El límite de una sucesión creciente acotada. Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que es creciente y acotada superiormente, esto es, $a_n \le a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n < +\infty$. Denotemos al supremo de esta sucesión por b:

$$b \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \coloneqq \sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

73. El límite de una sucesión creciente no acotada. Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que es creciente y no acotada superiormente, esto es, $a_n \le a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

74. El límite de una sucesión decreciente acotada. Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que es decreciente y acotada inferiormente, esto es, $a_{n+1} \le a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n > -\infty$. Denotemos al ínfimo de esta sucesión por b:

$$b \coloneqq \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \coloneqq \inf\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

75. El límite de una sucesión decreciente no acotada. Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que es decreciente y no acotada inferiormente, esto es, $a_{n+1} \le a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = -\infty.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

76. Comparación del límite superior con un número. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \le b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall c > b \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge k \quad x_n < c,$$

y

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \ge b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a < b \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \ge k \quad x_n > a.$$

77. Criterio del límite superior en términos de cuantificadores y desigualdades. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = b \qquad \iff \qquad \begin{cases} \forall c > b \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad x_n < c, \\ \forall a < b \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad x_n > a. \end{cases}$$

Aquí la llave sirve para formar un *sistema* de dos condiciones unidas con la operación lógica $\wedge$.

78. Comparación del límite inferior con un número. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Enuncie y demuestre resultados similares a 76 para $\limsup$.

79. Criterio del límite inferior en términos de cuantificadores y desigualdades. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Enuncie y demuestre un resultado similar a 76 para $\liminf$.

80. Existe un límite si, y sólo si, el límite inferior coincide con el límite superior. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) existe un $y \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$.

(b) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

81. Límite superior de la suma de sucesiones. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\limsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n.$$

82. Dé un ejemplo de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\limsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) < \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n.$$

83. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\limsup_{n\to\infty} (-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n.$$

84. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ algunas sucesiones en $\overline{\mathbb{R}}$ tales que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leq b_n.$$

Demuestre que

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$$

y

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n.$$