Temas preliminares de Análisis Matemático II

Problemas para examen

En esta lista de problemas, usamos la notación $\mathbb{N}$ para el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Propiedades de las operaciones con conjuntos

1 Problema. La unión de dos conjuntos contiene a cada uno de los conjuntos originales Sean A, B algunos conjuntos. Demuestre que

$$A \subseteq A \cup B.$$

De manera similar se demuestra que $B \subseteq A \cup B$.

2 Problema. La unión de dos conjuntos es el conjunto más pequeño entre todos los conjuntos que contienen a cada uno de los conjuntos originales Sean A, B, C algunos conjuntos tales que $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$. Demuestre que

$$A \cup B \subseteq C.$$

3 Problema (la intersección de dos conjuntos está contenida en cada uno de los conjuntos origionales)**.** Sean A, B algunos conjuntos. Demuestre que

$$A \cap B \subseteq A.$$

De manera similar se demuestra que $A \cap B \subseteq B$.

4 Problema (la intersección de dos conjuntos es el conjunto más grande entre todos los conjuntos contenidos en cada uno de los conjuntos originales)**.** Sean A, B, C algunos conjuntos tales que $C \subseteq A$ y $C \subseteq B$. Demuestre que

$$C \subseteq A \cap B.$$

5 Problema (criterio de que un conjunto está contenido en el otro)**.** Sean A y B conjuntos. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $A \subseteq B$; (ii) $A \cap B = A$; (iii) $A \cup B = B$; (iv) $A \setminus B = \varnothing$.

6 Problema (una representación de la diferencia de dos conjuntos)**.** Sean A y B algunos conjuntos. Demuestre que

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

7 Problema (las leyes distributivas)**.** Sean A, B, C conjuntos. Demuestre que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

8 Problema (leyes de De Morgan)**.** Sean A, B, C conjuntos. Demuestre que

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B), \qquad C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

9 Problema (dos definiciones equivalentes de la diferencia simétrica)**.** Sean A y B conjuntos. Demuestre que

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

El conjunto que está en ambos lados de la igualdad se llama la *diferencia simétrica* de A y B y se denota por $A \triangle B$.

10 Problema (la "desigualdad del triángulo" para la diferencia simétrica)**.** Sean A, B, C conjuntos. Demuestre que

$$A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (C \triangle B).$$

11 Problema (la propiedad asociativa de la diferencia simétrica)**.** Sean A, B, C conjuntos. Demuestre que

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

Propiedades de las operaciones con familias de conjuntos

12 Problema (la unión de una familia de conjuntos contiene a cada uno de los conjuntos de esta familia)**.** Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos y sea $k \in J$. Demostrar que

$$A_k \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j.$$

13 Problema (la unión de una familia de conjuntos es el conjunto más pequeño entre los conjuntos que contienen a cada uno de los elementos de esta familia)**.** Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos y sea C un conjunto tal que

$$\forall j \in J \qquad A_j \subseteq C.$$

Demuestre que

$$\bigcup_{j\in J} A_j \subseteq C.$$

14 Problema (criterio de que un conjunto contiene a la unión de una familia de conjuntos)**.** Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos y sea B un conjunto. Demuestre que

$$\bigcup_{j\in J} A_j \subseteq B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall j \in J \quad A_j \subseteq B.$$

15 Problema (la intersección de una familia de conjuntos está contenida en cada uno de los conjuntos de esta familia)**.** Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos y sea $k \in J$. Demostrar que

$$\bigcap_{j\in J} A_j \subseteq A_k.$$

16 Problema (la intersección de una familia de conjuntos es el conjunto más grande entre los conjuntos que están contenidos en cada uno de los elementos de esta familia)**.** Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos y sea C un conjunto tal que

$$\forall j \in J \qquad C \subseteq A_j.$$

Demuestre que

$$C \subseteq \bigcap_{j\in J} A_j.$$

17 Problema (criterio de que un conjunto está contenido en la intersección de una familia de conjuntos)**.** Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos y sea B un conjunto. Demuestre que

$$B \subseteq \bigcap_{j\in J} A_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall j \in J \quad B \subseteq A_j.$$

18 Problema (la propiedad distributiva de la intersección respecto a la unión)**.** Sea A un conjunto y sea $(B_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos. Demuestre que

$$A \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j \right) = \bigcup_{j\in J} (A \cap B_j).$$

19 Problema (la propiedad distributiva de la unión respecto a la intersección)**.** Sea A un conjunto y sea $(B_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos. Demuestre que

$$A \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j \right) = \bigcap_{j\in J} (A \cup B_j).$$

20 Problema (las leyes de De Morgan para familias de conjuntos)**.** Sea C un conjunto y sea $(B_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos. Demuestre que

$$C \setminus \left(\bigcup_{j\in J} B_j \right) = \bigcap_{j\in J} (C \setminus B_j), \qquad C \setminus \left(\bigcap_{j\in J} B_j \right) = \bigcup_{j\in J} (C \setminus B_j).$$

Estructura de sucesiones monótonas de conjuntos

21 Problema (lema sobre una sucesión creciente de conjuntos y los índices de pertenencia)**.** Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos, sea $k \in \mathbb{N}$ y sea $x \in A_k$. Denotemos por J al conjunto de los índices n tales que $x \in A_n$:

$$J := \Big\{n \in \mathbb{N}\colon\ x \in A_n\Big\}.$$

Demuestre que:

1. $J \neq \varnothing$.

2. J tiene un único elemento mínimo; lo denotemos por p.

3. $p \leq k$.

4. $J = \{j \in \mathbb{N}\colon\ j \geq p\}$.

22 Problema (teorema sobre la sucesión de las diferencias consecutivas de una sucesión creciente de conjuntos)**.** Sea $(A_j)_{j=0}^{\infty}$ una sucesión creciente de conjuntos que empieza con el conjunto vacío:

$$\varnothing = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$$

Denotemos por $D_1, D_2, D_3, \ldots$ a las siguientes diferencias:

$$D_k = A_k \setminus A_{k-1} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

I. Demuestre que la sucesión $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta: si $j, k \in \mathbb{N}$ y $j < k$, entonces $D_j \cap D_k = \varnothing$.

II. Demuestre que para cada n en $\mathbb{N}$,

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} D_k \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Sugerencia: utilice el Lema 21 o demuestre la fórmula por inducción matemática sobre n.

III. Demuestre que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Sugerencia: utilice el resultado del inciso II.

23 Problema (pasar de una sucesión arbitraria de conjuntos a una sucesión creciente y luego a una sucesión disjunta)**.** Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos. Para todo k en $\mathbb{N}_0$, pongamos

$$B_k \coloneqq \bigcup_{n=1}^{k} A_n,$$

y para todo $k \in \{1, 2, \ldots\}$ pongamos

$$D_k \coloneqq B_k \setminus B_{k-1}.$$

Demuestre las siguientes afirmaciones.

1. La sucesión $(B_k)_{k=0}^{\infty}$ es creciente y $B_0 = \varnothing$.

2. La sucesión $(D_k)_{k=1}^{\infty}$ es disjunta.

3. Para cada k en $\mathbb{N}$,
$$D_k = A_k \setminus B_{k-1}.$$

4. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j.$

24 Problema (lema de una sucesión decreciente de conjuntos y los índices de pertenencia)**.** Sean $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de conjuntos, sea $k \in \mathbb{N}$ y sea $x \in A_k$. Denotemos por J al conjunto de los índices n tales que $x \in A_n$:

$$J \coloneqq \Big\{ n \in \mathbb{N}:\ \ x \in A_n \Big\}.$$

Demuestre las siguientes afirmaciones.

1. $J \neq \varnothing$.

2. Si $J \neq \mathbb{N}$, entonces el conjunto $\mathbb{N} \setminus J$ es no vacío y tiene un elemento mínimo.

3. Si $J \neq \mathbb{N}$, entonces existe p en $\mathbb{N}$ tal que $J = \{1, \ldots, p\}$. Además, $p \geq k$.

25 Problema (teorema sobre la sucesión de las diferencias sucesivas de una sucesión decreciente de conjuntos)**.** Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de conjuntos:

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots.$$

Denotemos por C a la intersección de esta sucesión y por $D_1, D_2, D_3, \ldots$ a las siguientes diferencias:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad\qquad D_k = A_k \setminus A_{k+1} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Demuestre que para cada n en $\mathbb{N}$,

$$A_n = C \cup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} D_k \right).$$

Propiedades de imágenes y preimágenes de conjuntos bajo funciones

En los siguientes ejercicios X y Y son algunos conjuntos y $f\colon X \to Y$ es una función.

26 Problema (definición de la preimagen de un conjunto respecto a una función)**.** Sea $B \subseteq Y$. Recuerde la definición de $f^{-1}[B]$.

27 Problema (definición de la imagen de un conjunto respecto a una función)**.** Sea $A \subseteq X$. Recuerde la definición de $f[A]$.

28 Problema (la imagen y la preimagen del conjunto vacío)**.** Demuestre que

$$f[\varnothing] = \varnothing, \qquad f^{-1}[\varnothing] = \varnothing.$$

29 Problema (monotonía de la preimagen)**.** Sean $B_1, B_2 \subseteq Y$ tales que $B_1 \subseteq B_2$. Demuestre que

$$f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2].$$

30 Problema (monotonía de la imagen)**.** Sean $A_1, A_2 \subseteq X$ tales que $A_1 \subseteq A_2$. Demuestre que

$$f[A_1] \subseteq f[A_2].$$

31 Problema (la preimagen de la unión)**.** Sean $B_1, B_2 \subseteq Y$. Demuestre que

$$f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2].$$

32 Problema (la preimagen de la intersección)**.** Sean $B_1, B_2 \subseteq Y$. Demuestre que

$$f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2].$$

33 Problema (la imagen de la unión)**.** Sean $A_1, A_2 \subseteq X$. Demuestre que

$$f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2].$$

34 Problema (la imagen de la intersección)**.** Sean $A_1, A_2 \subseteq X$. Demuestre que

$$f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2].$$

35 Problema (la imagen de la preimagen)**.** Sea $B \subseteq Y$. Demuestre que

$$f[f^{-1}[B]] \subseteq B.$$

36 Problema (la preimagen de la imagen)**.** Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $A \subseteq X$. Demuestre que

$$A \subseteq f^{-1}[f[A]].$$

En los siguientes ejercicios hay que construir ejemplos con contenciones estrictas.

37 Problema (la imagen de la intersección, construir un ejemplo con la contención estricta)**.** Construir conjuntos X, Y, función f y conjuntos $A_1, A_2 \subseteq X$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] \subsetneq f[A_1] \cap f[A_2].$$

38 Problema (la imagen de la preimagen, construir un ejemplo con la contención estricta)**.** Construya conjuntos X, Y, una función $f\colon X \to Y$ y un conjunto $B \subseteq Y$ tales que

$$f[f^{-1}[B]] \subsetneq B.$$

39 Problema (preimagen de la imagen, construir un ejemplo con la contención estricta)**.** Construya conjuntos X, Y, una función $f\colon X \to Y$ y un conjunto $A \subseteq X$ tales que

$$A \subsetneq f^{-1}[f[A]].$$

Imágenes y preimágenes de familias de conjuntos

En los siguientes ejercicios se supone que X, Y son conjuntos y $f\colon X \to Y$ es una función.

40 Problema (la preimagen de la unión de una familia)**.** Sea $(B_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos tales que $B_j \subseteq Y$ para cada j en J. Demuestre que

$$f^{-1}\left[\bigcup_{j\in J} B_j\right] = \bigcup_{j\in J} f^{-1}[B_j].$$

41 Problema (la preimagen de la intersección de una familia)**.** Sea $(B_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos tales que $B_j \subseteq Y$ para cada j en J. Demuestre que

$$f^{-1}\left[\bigcap_{j\in J} B_j\right] = \bigcap_{j\in J} f^{-1}[B_j].$$

42 Problema (la imagen de la unión de una familia)**.** Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos tales que $A_j \subseteq X$ Demuestre que

$$f\left[\bigcup_{j\in J} A_j\right] = \bigcup_{j\in J} f[A_j].$$

43 Problema (la imagen de la intersección de una familia)**.** Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos tales que $A_j \subseteq X$ para cada j en J. Demuestre que

$$f\left[\bigcap_{j\in J} A_j\right] \subseteq \bigcap_{j\in J} f[A_j].$$

44 Problema (la imagen de la intersección de una familia: construir ejemplo con la contención estricta)**.** Constuya algunos conjuntos X, Y, una función $f\colon X \to Y$ y una familia de conjuntos $(A_j)_{j\in J}$ tales que $A_j \subseteq X$ para cada j en J y

$$f\left[\bigcap_{j\in J} A_j\right] \subsetneq \bigcap_{j\in J} f[A_j].$$

Intervalos del eje real

45 Problema (definición de los intervalos)**.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Por definición,

$$[a, b] \coloneqq \big\{x \in \mathbb{R}: \quad a \le x \quad \land \quad x \le b\big\}.$$

Recuerde las definiciones de $[a, b)$, $(a, b]$ y (a, b).

46 Problema. Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$(a, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, +\infty\right).$$

47 Problema. Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$[a, +\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, +\infty\right).$$

48 Problema. Sea $b \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, b - \frac{1}{n}\right].$$

49 Problema. Sea $b \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$(-\infty, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, b + \frac{1}{n}\right].$$

50 Problema. Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right).$$

Estructura de subconjuntos abiertos del eje real

51 Problema. Recuerde la definición del espacio topológico.

52 Problema. Sea (X, d) un espacio métrico. Escriba la definición de la topología τ_d inducida por d. Demuestre que τ_d es una topología.

Definimos la topología en $\mathbb{R}$ por medio de la distancia común $d(x, y) := |x - y|$.

53 Problema. Sea A un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Definimos en A la relación binaria $\overset{A}{\sim}$ mediante la siguiente regla:

$$x \overset{A}{\sim} y \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad [x, y] \cup [y, x] \subseteq A.$$

Demuestre que $\overset{A}{\sim}$ es una relación de equivalencia.

54 Problema (lema sobre las componentes de un subconjunto abierto de la recta real)**.** Sea A un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ y sea $x \in A$. Denotemos por $[x]_A$ a la clase de equivalencia de x respecto a la relación binaria $\overset{A}{\sim}$:

$$[x]_A := \{y \in A\colon\ x \overset{A}{\sim} y\}.$$

Pongamos

$$a_x := \inf\{y \in (-\infty, x)\colon\ (y, x) \subseteq A\}, \qquad b_x := \sup\{z \in (x, +\infty)\colon\ (x, z) \subseteq A\}.$$

Demuestre que

$$[x]_A = (a_x, b_x).$$

Sugerencias: 1) demostrar que $a_x < x < b_x$, 2) en la parte $[x]_A \subseteq (a_x, b_x)$ usar que si $y \overset{A}{\sim} x$, entonces $[y]_A = [x]_A$, $a_y = a_x$, $b_y = b_x$, y y aplicar el inciso 1); 3) en la parte $(a_x, b_x) \subseteq [x]_A$ usar lemas sobre la comparación del sup e inf con un número.

55 Problema (teorema sobre la estructura de subconjuntos abiertos del eje real)**.** Demuestre que cada conjunto abierto A en $\mathbb{R}$ se puede representar como una unión finita o numerable de intervalos abiertos, disjuntos entre si.

El eje real extendido

56 Problema (definición de la topología en el eje real extendido)**.** Denotemos por $\mathcal{G}$ al conjunto de los intervalos que tienen una de las siguientes tres formas (con $a, b \in \mathbb{R}$):

$$(a, +\infty], \qquad (a, b), \qquad [-\infty, b).$$

Demuestre que para cualesquiera P, Q en $\mathcal{G}$ se tiene que $P \cap Q \in \mathcal{G}$. Hay que considerar todos los casos posibles. Explique cómo se define la topología en $\overline{\mathbb{R}}$.

57 Problema (ejemplo de subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$ que no es abierto ni cerrado)**.** Demuestre que el conjunto $[3, +\infty)$ no es abierto ni cerrado en $\overline{\mathbb{R}}$.

58 Problema (¿es la adición una operación continua en $[0, +\infty]$?)**.** Determine si la función $f\colon [0, +\infty] \times [0, +\infty] \to [0, +\infty]$, definida mediante la siguiente regla, es continua o no.

$$f(x, y) \coloneqq \begin{cases} x + y, & \text{si} \quad x, y \in [0, +\infty); \\ +\infty, & \text{si} \quad x = +\infty \ \vee \ y = +\infty. \end{cases}$$

59 Problema (¿es la multiplicación una operación continua en $[0, +\infty]$?)**.** Determine si la función $g\colon [0, +\infty] \times [0, +\infty] \to [0, +\infty]$, definida mediante la siguiente regla, es continua o no.

$$g(x, y) \coloneqq \begin{cases} xy, & \text{si} \quad x, y \in [0, +\infty), \\ 0, & \text{si} \quad x = 0,\ y = +\infty, \\ 0, & \text{si} \quad x = +\infty,\ y = 0, \\ +\infty, & \text{si} \quad x = y = +\infty. \end{cases}$$

Supremo e ínfimo de un conjunto

60 Problema (existencia del supremo)**.** Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Recuerde la definición del supremo de A. Explique la unicidad del supremo (en caso de existencia). Demuestre que A tiene un supremo. Aceptamos sin demostración un caso particular de esta afirmación, cuando $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, A es acotado por arriba.

61 Problema (comparación del supremo con un número, situaciones simples)**.** Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\sup(A) \le b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \quad a \le b,$$
$$\sup(A) > b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a \in A \quad a > b.$$

62 Problema (comparación del supremo con un número, situaciones más complicadas)**.** Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\sup(A) \ge b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall u < b \quad \exists a \in A \quad a > u,$$
$$\sup(A) < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists u < b \quad \forall a \in A \quad a \le u.$$

63 Problema (criterio del supremo en términos de cuantificadores y desigualdades)**.** Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\sup(A) = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall a \in A \quad a \le b, \\ \forall u < b \quad \exists a \in A \quad a > u. \end{cases}$$

Aquí la llave sirve para formar un *sistema* de dos condiciones unidas con la operación lógica $\wedge$.

64 Problema (existencia del ínfimo)**.** Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Recuerde la definición del ínfimo de A. Explique la unicidad del ínfimo (en caso de existencia). Demuestre que A tiene un ínfimo. Aceptamos sin demostración un caso particular de esta afirmación, cuando $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, A es acotado por abajo.

65 Problema (comparación del ínfimo con un número, situaciones simples)**.** Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\inf(A) \ge b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \quad a \ge b,$$
$$\inf(A) < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a \in A \quad a < b,$$

66 Problema (comparación del ínfimo con un número, situaciones más complicadas)**.** Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\inf(A) \le b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall u > b \quad \exists a \in A \quad a < u,$$
$$\inf(A) > b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists u > b \quad \forall a \in A \quad a \ge u.$$

67 Problema (criterio del ínfimo en términos de cuantificadores y desigualdades)**.** Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\inf(A) = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall a \in A \quad a \geq b, \\ \forall u > b \quad \exists a \in A \quad a < u. \end{cases}$$

Aquí la llave sirve para formar un *sistema* de dos condiciones unidas con la operación lógica $\wedge$.

68 Problema (propiedad creciente del supremo)**.** Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tales que $A \subseteq B$. Demuestre que

$$\sup A \leq \sup B.$$

69 Problema (propiedad decreciente del ínfimo)**.** Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tales que $A \subseteq B$. Demuestre que

$$\inf A \geq \inf B.$$

70 Problema (el supremo de la unión de dos conjuntos)**.** Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\sup(A \cup B) = \max\bigl\{\sup(A), \sup(B)\bigr\}.$$

71 Problema (el ínfimo de la unión de dos conjuntos)**.** Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\inf(A \cup B) = \min\bigl\{\inf(A), \inf(B)\bigr\}.$$

72 Problema (el supremo de la unión de una familia de conjuntos)**.** Sea $(A_j)_{j \in J}$ una familia no vacía de subconjuntos de $\overline{\mathbb{R}}$. Pongamos

$$B \coloneqq \bigcup_{j \in J} A_j, \qquad C \coloneqq \bigl\{u \in \overline{\mathbb{R}} \colon \; \exists k \in J \quad u = \sup(A_k)\bigr\}.$$

Demuestre que $\sup(B) = \sup(C)$.

73 Problema (el ínfimo de la unión de una familia de conjuntos)**.** Sea $(A_j)_{j \in J}$ una familia no vacía de subconjuntos de $\overline{\mathbb{R}}$. Pongamos

$$B \coloneqq \bigcup_{j \in J} A_j, \qquad C \coloneqq \bigl\{u \in \overline{\mathbb{R}} \colon \; \exists k \in J \quad u = \inf(A_k)\bigr\}.$$

Demuestre que $\inf(B) = \inf(C)$.

Supremos, ínfimos y operaciones aritméticas

74 Problema (el supremo de un múltiplo positivo de un conjunto). Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $\lambda \in (0, +\infty)$. Demuestre que

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A).$$

75 Problema (el ínfimo de un múltiplo positivo de un conjunto). Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $\lambda \in (0, +\infty)$. Demuestre que

$$\inf(\lambda A) = \lambda \inf(A).$$

76 Problema (el supremo del conjunto opuesto). Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

77 Problema (el ínfimo del conjunto opuesto). Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\inf(-A) = -\sup(A).$$

78 Problema (el supremo de la suma de dos conjuntos). Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. Demuestre que

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

79 Problema (el ínfimo de la suma de dos conjuntos). Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. Demuestre que

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B).$$

El límite superior y el límite inferior de una sucesión

80 Problema (el límite de una sucesión creciente acotada)**.** Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que es creciente y acotada superiormente, esto es, $a_n \le a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n < +\infty$. Denotemos al supremo de esta sucesión por b:

$$b \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \coloneqq \sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

81 Problema (el límite de una sucesión creciente no acotada)**.** Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que es creciente y no acotada superiormente, esto es, $a_n \le a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

82 Problema (el límite de una sucesión decreciente acotada)**.** Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que es decreciente y acotada inferiormente, esto es, $a_{n+1} \le a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n > -\infty$. Denotemos al ínfimo de esta sucesión por b:

$$b \coloneqq \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \coloneqq \inf\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

83 Problema (el límite de una sucesión decreciente no acotada)**.** Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que es decreciente y no acotada inferiormente, esto es, $a_{n+1} \le a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = -\infty.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

84 Problema (comparación del límite superior con un número)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \le b \qquad \iff \qquad \forall c > b \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge k \quad x_n < c.$$

Demuestre que

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \ge b \qquad \iff \qquad \forall a < b \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \ge k \quad x_n > a.$$

85 Problema (criterio del límite superior en términos de cuantificadores y desigualdades)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall c > b \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad x_n < c, \\ \forall a < b \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad x_n > a. \end{cases}$$

Aquí la llave sirve para formar un *sistema* de dos condiciones unidas con la operación lógica $\wedge$.

86 Problema (comparación del límite inferior con un número)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Enuncie y demuestre resultados similares a 84 para lim sup.

87 Problema (criterio del límite inferior en términos de cuantificadores y desigualdades)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Enuncie y demuestre un resultado similar a 84 para lim inf.

88 Problema (existe un límite si, y sólo si, el límite inferior coincide con el límite superior)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) existe un $y \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$.

(b) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Más aún, si las condiciones (a) y (b) se cumplen, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

89 Problema (el límite superior de la suma de dos sucesiones)**.** Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$. Demuestre que

$$\limsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n.$$

90 Problema (el límite superior de la suma de dos sucesiones puede ser estrictamente menor que la suma de sus límites superiores)**.** Dé un ejemplo de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ tales que

$$\limsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) < \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n.$$

91 Problema (el límite superior de la sucesión opuesta)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\limsup_{n\to\infty} (-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n.$$

92 Problema. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ algunas sucesiones en $\overline{\mathbb{R}}$ tales que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \le b_n.$$

Demuestre que

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n$$

y

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n.$$