Espacios L^p

Problemas para examen

Conjuntos convexos

1. Todos los subconjuntos convexos del eje real son intervalos. Sea X un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$. Denotamos por a y b ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$) su ínfimo y supremo:

$$a \coloneqq \inf(X), \qquad b \coloneqq \sup(X).$$

Demuestre que $(a, b) \subseteq X$.

2. Varias descripciones equivalentes de los intervalos en el eje real. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

- X es convexo;
- $(a, b) \subseteq X$, donde $a = \inf(X)$, $b = \sup(X)$;
- X es un intervalo, es decir, existen a y b en $\overline{\mathbb{R}}$ tales que X tiene una de las siguientes formas:
$$(a, b), \qquad (a, b], \qquad [a, b), \qquad [a, b];$$

Para los estudiantes que estudiaron la topología, se recomienda demostrar que las condiciones anteriores son equivalentes a las siguientes:

- X es conexo;
- X es arco-conexo.

Funciones convexas

3. Criterio de la convexidad de una función en términos de diferencias divididas del primer orden. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa $\smile$;

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in A$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

(c) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_1, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in A$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

(d) $\Delta_f(x_1, x_3) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in A$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

4. Criterio de la convexidad de una función en términos de diferencias divididas del segundo orden. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) $\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \ge 0$ para todos puntos diferentes $x_1, x_2, x_3 \in A$.

5. Teorema (criterio de la convexidad de una función en términos de su primera derivada). Sea $A \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en A y derivable en $\operatorname{int}(A)$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) f' es creciente en $\operatorname{int}(A)$.

6. Corolario (criterio de la convexidad de una función en términos de su segunda derivada). Sea $A \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en A y dos veces derivable en $\operatorname{int}(A)$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) $f''(x) \ge 0$ para todo x en $\operatorname{int}(A)$.

7. Convexidad estricta de una función cuya primera derivada crece estrictamente. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en A y derivable en $\operatorname{int}(A)$. Supongamos que f' es estrictamente creciente. Demuestre que f es estrictamente convexa, es decir, si $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \ne x_2$ y $\alpha \in (0, 1)$, entonces

$$f((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) < (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2).$$

8. Derivadas parciales de una función convexa. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un intervalo, sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa y sea $c \in A$.

1. Demuestre que si c no es el extremo izquierdo de A, entonces

$$\lim_{x\to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \sup_{\substack{x<c\\ c\in A}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

   y este supremo pertenece al intervalo $(-\infty, +\infty]$.

2. Demuestre que si c no es el extremo derecho de A, entonces

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \inf_{\substack{x>c\\ c\in A}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

   y este ínfimo pertenece al intervalo $[-\infty, +\infty)$.

3. Demuestre que si $c \in \operatorname{int}(A)$, entonces

$$-\infty < f'_{izq}(c) \leq f'_{der}(c) < +\infty.$$

9. Existencia de una recta básica de la gráfica de una función convexa. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un intervalo, sea $c \in \operatorname{int}(A)$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa. Demuestre que existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo x en A se cumple la desigualdad

$$f(x) \geq \alpha(x - c) + f(c).$$

10. Desigualdad de Jensen. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$, $A \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f \in L^1(X, \mu, A)$ y $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa. Demuestre que

$$\varphi\left(\int\limits_X f\,d\mu\right) \leq \int\limits_X \varphi \circ f\,d\mu.$$

11. Desigualdad de Hardy. Sea $f \in L^p((0, +\infty), \mu, [0, +\infty])$, donde $p \in (1, +\infty)$ y μ es la medida de Lebesgue. Definamos $g\colon (0, +\infty) \to [0, +\infty]$ mediante la fórmula

$$g(x) \coloneqq \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Demuestre que

$$\int\limits_0^{+\infty} g(x)^p\,\mathrm{d}x \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int\limits_0^{+\infty} f(x)^p\,\mathrm{d}x.$$

Desigualdades de Young, Hölder y Minkowski

12. Convexidad de la función exponencial. Usando el criterio de términos de la segunda derivada demuestre que la función exponencial exp, considerada en el dominio $\mathbb{R}$, es convexa. Demuestre que para todos $x, y \geq 0$ y todos $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$ se cumple la desigualdad

$$x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y.$$

13. Convexidad estricta de la función exponencial. Usando el resultado del Problema 7 demuestre que la función exponencial exp, considerada en el dominio $\mathbb{R}$, es estrictamente convexa. Demuestre que para todos $x, y \geq 0$, tales que $x \neq y$, y todos $\alpha, \beta > 0$, tales que $\alpha + \beta = 1$, se cumple la desigualdad

$$x^\alpha y^\beta < \alpha x + \beta y.$$

14. Desigualdad de Young. Sean $a, b \geq 0$ y sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$. Demuestre que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

15. El caso de igualdad en la desigualdad de Young. Sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Determine qué condición deben satisfacer a y b para que se cumpla la igualdad

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Sugerencia: se puede usar el resultado del Problema 13.

16. Desigualdad de Hölder. Enuncie y demuestre la desigualdad de Hölder. Sugerencia: después de quitar los casos triviales cuando las cantidades $\|f\|_p$ y $\|g\|_q$ son iguales a cero o infinitas, considerar las funciones

$$u(x) := \frac{1}{\|f\|_p}\, f(x), \qquad v(x) := \frac{1}{\|g\|_q}\, g(x),$$

aplicar la desigualdad de Young a los números $u(x)$ y $v(x)$ e integrar sobre X.

17. El caso de igualdad en la desigualdad de Hölder. Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tales que $0 < \|f\|_p < +\infty$, $0 < \|g\|_q < +\infty$ y

$$\|fg\|_1 = \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Demuestre que existe $\alpha > 0$ tal que en μ-casi todas partes se cumple la igualdad $f^p = \alpha g^q$. Sugerencia: repasar el razonamiento sugerido en el Problema 16, notar que ciertas integrales son iguales, restarlas, concluir que cierta función es cero casi en todas partes, y usar el resultado del Problema 15.

18. El teorema inverso de Hölder.. Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sea $f \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ tal que $\|f\|_p > 0$. Construya $g \in L^q(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ tal que $\|g\|_q = 1$ y $\|fg\|_1 = \|f\|_p$.

19. Desigualdad de Minkowski. Enuncie y demuestre la desigualdad de Minkowski.

20. El caso de igualdad en la desigualdad de Minkowski. Sea $p \in [1, +\infty)$. Determine cuándo la desigualdad de Minkowski se convierte en una igualdad. En otras palabras, encuentre una condición necesaria y suficiente para que $\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$.

21. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$, sean $f, g\colon X \to (0, +\infty)$ funciones positivas μ-medibles tales que $f(x)g(x) \geq 1$ para todo $x \in X$. Demuestre que

$$\int\limits_X f\, d\mu \cdot \int\limits_X g\, d\mu \geq 1.$$

Supremo esencial

22. Acerca de la definición del supremo esencial de una función. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Denotemos por c al ínfimo del conjunto

$$B = \Big\{b \in \overline{\mathbb{R}}_+ : \ \mu\big(\{x \in X : \ f(x) > b\}\big) = 0\Big\}.$$

Demuestre que $c \in B$, esto es, $f(x) \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{\le} c$.

23. Otra descripción del supremo esencial de una función. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Sea c el supremo esencial de f y sea

$$A = \Big\{\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+ : \ \mu\big(\{x \in X : \ f(x) \ge \alpha\}\big) > 0\Big\}.$$

Demuestre que $c = \sup(A)$.

24. Propiedad subaditiva del supremo esencial. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Demuestre que

$$\operatorname{ess\,sup}(f + g) \le \operatorname{ess\,sup}(f) + \operatorname{ess\,sup}(g).$$

Rango esencial y supremo esencial (tareas adicionales)

Se supone que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

Definición (rango esencial). Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. El *rango esencial* de f se define de la siguiente manera:

$$\mathcal{ER}(f) = \Big\{w \in \mathbb{C} : \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu\big(\{x \in X : \ |f(x) - w| < \varepsilon\}\big) > 0\Big\}.$$

25. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demuestre que el $\mathcal{ER}(f)$ es cerrado.

26. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demuestre que

$$\operatorname{ess\,sup} |f| = \sup\{|w| : \ w \in \mathcal{ER}(f)\}.$$

Espacios L^p

27. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$, sean $p, r \in [1, +\infty)$ tales que $p < r$ y sea $f \in L^r(X, \mu, \mathbb{C})$. Demuestre que $f \in L^p(X, \mu, \mathbb{C})$ y

$$\|f\|_p \leq \|f\|_r.$$

28. La convergencia en L^p implica la convergencia en medida en el caso de una medida finita. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita, sea $p \in [1, +\infty)$ y sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(X, \mu, \mathbb{C})$, $g \in L^p(X, \mu, \mathbb{C})$ tales que $\|f_n - g\|_p \to 0$. Demuestre que

$$f_n \xrightarrow{\mu} g.$$

29. Propiedad subaditiva de la pseudonorma en L^∞. Escriba la definición de la pseudonorma $\|\cdot\|_\infty$ y demuestre que esta cumple con la propiedad subaditiva.

30. La norma $\|\cdot\|_\infty$ como el límite de las normas $\|\cdot\|_p$. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita y sea $f \in L^\infty(X, \mu)$. Demuestre que

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Sugerencia: en una parte de la solución puede ser útil suponer que $v < \|f\|_\infty$ y considerar el conjunto $A \coloneqq \{x \in X : \ |f(x)| \geq v\}$.

Sucesiones regulares de Cauchy

Suponemos que (M, d) es un espacio métrico.

Definición (sucesión regular de Cauchy). Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en (M, d). Se dice que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión *regular de Cauchy* si para todo $n \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

31. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en (M, d). Demuestre que para todos $m, n \in \mathbb{N}$

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{2^{\min\{m,n\}}}.$$

Deduzca de aquí que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

32. Existencia de una subsucesión regular de Cauchy en una sucesión de Cauchy. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (M,d). Demuestre que existe una sucesión estrictamente creciente $\nu\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tal que $(x_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy, esto es, para todo $k\in\mathbb{N}$

$$d(x_{\nu_k}, x_{\nu_{k+1}}) \le \frac{1}{2^k}.$$

33. Convergencia de una sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (M,d) y sea $\nu\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ una sucesión creciente tal que $(x_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $a\in M$. Demuestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto a.

34. Criterio de que un espacio métrico es completo. Sea (M,d) un espacio métrico. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) (M,d) es completo, esto es, toda sucesión de Cauchy tiene un límite en M;

(b) toda sucesión sucesión regular de Cauchy tiene tiene un límite en M.

Completitud de los espacios L^p

35. Completitud del espacio L^1. Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida. Demuestre que el espacio $L^1(X,\mathcal{F},\mu)$ es completo.

36. Completitud de los espacios L^p. Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida y sea $p\in(1,+\infty)$. Demuestre que el espacio $L^p(X,\mathcal{F},\mu)$ es completo usando el hecho que $L^1(X,\mathcal{F},\mu)$ es completo.

37. Completitud del espacio L^∞. Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio con medida. Demuestre que el espacio $L^\infty(X,\mathcal{F},\mu)$ es completo.

Aproximación por funciones continuas

38. Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, sea $\mathcal{F}\subset 2^X$ una σ-álgebra que contiene a todos los conjuntos de Borel y sea $\mu\colon \mathcal{F}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ una medida regular. Entonces para todo $p\in[1,+\infty)$ el conjunto $C_c(X,\mathbb{C})$ es denso en $L^1(X,\mu,\mathbb{C})$.