Espacios L^p

Problemas para examen

La desigualdad de Young

1 Ejercicio (la desigualdad de Young)**.** Sean $a, b \geq 0$ y sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Recordar alguna demostración de la siguiente desigualdad:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Sugerencia: se puede usar la convexidad de la función exponencial.

2 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad de Young)**.** Sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Determinar cuál condición deben satisfacer a y b para que se cumpla la igualdad

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Sugerencia: se puede usar la convexidad estricta de la función exponencial.

La desigualdad de Hölder

En muchos ejercicios vamos a suponer que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida. Si $1 \leq p < +\infty$ y $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ o $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, usamos la siguiente notación:

$$\mathcal{N}_p(f) \coloneqq \left(\int_X f^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}. \tag{1}$$

Aceptamos el convenio que $(+\infty)^{1/p} = +\infty$.

3 Ejercicio (exponentes complementarios)**.** Sean $p, q > 1$. Demostrar que las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

(b) $p + q = pq$,

(c) $(p - 1)(q - 1) = 1$,

(d) $p(q-1) = q$,

(e) $q(p-1) = p$.

4 Ejercicio (la desigualdad de Hölder para funciones no negativas)**.** Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean f, g en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Demostrar que

$$\mathcal{N}_1(fg) \le \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g).$$

Sugerencias. Primero, considerar los casos triviales cuando las cantidades $\mathcal{N}_p(f)$ o $\mathcal{N}_q(g)_q$ son iguales a cero o infinitas. En el caso principal, cuando

$$0 < \mathcal{N}_p(f) < +\infty \qquad \text{y} \qquad 0 < \mathcal{N}_q(g) < +\infty,$$

considerar las funciones

$$u(x) \coloneqq \frac{1}{\mathcal{N}_p(f)}\, f(x), \qquad v(x) \coloneqq \frac{1}{\mathcal{N}_q(g)}\, g(x),$$

aplicar la desigualdad de Young a los números $u(x)$ y $v(x)$ e integrar sobre X.

5 Ejercicio (la desigualdad de Hölder para funciones complejas)**.** Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean f, g en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Mostrar que

$$\mathcal{N}_1(fg) \le \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g).$$

Sugerencia: aplicar el resultado del Ejercicio 4.

6 Ejercicio (la desigualdad de Hölder, cuando la segunda función es la constante 1)**.** Supongamos que $\mu(X) < +\infty$. Aplicar la desigualdad de Hölder al caso cuando g es la constante 1, y demostrar una desigualdad de la forma

$$\int_X |f|\, \mathrm{d}\mu \le c\mathcal{N}_p(f),$$

donde c es cierta constante que depende de $\mu(X)$ y de p. Hay que encontrar c.

7 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad de Hölder)**.** Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tales que $0 < \|f\|_p < +\infty$, $0 < \|g\|_q < +\infty$ y

$$\mathcal{N}_1(fg) = \mathcal{N}_p(f)\, \mathcal{N}_q(g).$$

Demostrar que existe $\alpha > 0$ tal que en μ-casi todas partes se cumple la igualdad

$$|f|^p = \alpha |g|^q.$$

Sugerencia: repasar el razonamiento sugerido en el Ejercicio 4, notar que ciertas integrales son iguales, restarlas, concluir que cierta función es cero casi en todas partes, y usar el resultado del Ejercicio 2.

8 Ejercicio (el teorema inverso de Hölder)**.** Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que $0 < \mathcal{N}_p(f) < +\infty$. Construir g en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que $\mathcal{N}_q(g) = 1$ y $\mathcal{N}_1(fg) = \mathcal{N}_p(f)$.

La desigualdad de Minkowski

9 Ejercicio (una cota superior para la potencia p de la suma)**.** Sean $a, b \geq 0$ y sea $p \in [1, +\infty[$. Demostrar que

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Sugerencia: aplicar la convexidad de la función

$$\varphi\colon [0,+\infty[\to [0,+\infty[\,, \qquad \varphi(t) \coloneqq t^p.$$

10 Ejercicio (un lema para la desigualdad de Minkowski)**.** Sea $p \in [1, +\infty[$ y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demostrar que si $\mathcal{N}_p(f) < +\infty$ y $\mathcal{N}_p(g) < +\infty$, entonces $\mathcal{N}_p(f+g) < +\infty$. Una demostración posible está basada en el resultado del Ejercicio 9.

11 Ejercicio (la desigualdad de Minkowski)**.** Sea $p \in [1, +\infty[$ y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demostrar que

$$\mathcal{N}_p(f+g) \leq \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g).$$

Sugerencia. Primero, considerar algunos casos triviales. En el caso principal, cuando

$$\mathcal{N}_p(f) < +\infty, \qquad \mathcal{N}_p(g) < +\infty, \qquad 0 < \mathcal{N}_p(f+g) < +\infty,$$

empezar con la desigualdad

$$|f+g|^p = |f+g|\,|f+g|^{p-1} \leq |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1},$$

aplicar de manera apropiada la desigualdad de Hölder y dividir ambos lados entre cierta potencia de $\mathcal{N}_p(f+g)$.

12 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad de Minkowski)**.** Sea $p \in [1, +\infty[$ y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Determinar cuándo la desigualdad de Minkowski se convierte en una igualdad. En otras palabras, enconstrar una condición necesaria y suficiente para que

$$\mathcal{N}_p(f+g) = \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g).$$

13 Ejercicio. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$ y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F},]0, +\infty[)$ tales que

$$\forall x \in X \qquad f(x)g(x) \geq 1.$$

Demostrar que

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \cdot \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu \geq 1.$$

14 Ejercicio (la desigualdad de Hardy)**.** Este ejercicio es más complicado que los anteriores. Consideramos el espacio $X \coloneqq]0, +\infty[$ con la σ-álgebra de Lebesgue restringida $\mathcal{F}$ y con la medida de Lebesgue restringida μ. Sean

$$1 < p < +\infty, \qquad f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty[\,).$$

Definamos $g\colon X \to [0,+\infty]$ mediante siguiente fórmula:

$$g(x) \coloneqq \frac{1}{x} \int\limits_{]0,x]} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostrar que

$$\mathcal{N}_p(g) \le \frac{p}{p-1} \mathcal{N}_p(f).$$

El supremo esencial de una función positiva medible

Aquí vamos a trabajar solamente con las funciones no negativas, aunque la situación es similar para las funciones con valores en $[-\infty,+\infty]$.

En algunos ejercicios, vamos a suponer que $(X,\mathcal{F},\mu)$ es un espacio de medida.

15 Ejercicio (repaso: algunas propiedades de los rayos derechos)**.** Justificar las siguientes propiedades.

- Si $v,w \in \mathbb{R}$ y $v \le w$, entonces

$$]v,+\infty] \ \supseteq]w,+\infty].$$

- Si $v \in \mathbb{R}$, entonces

$$]v,+\infty] = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \left]v + \frac{1}{p}, +\infty\right].$$

16 Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},[0,+\infty])$. Para cada v en $[0,+\infty]$, pongamos

$$A_{f,v} \coloneqq f^{-1}\Big[\,]v,+\infty]\,\Big],$$

esto es,

$$A_{f,v} \coloneqq \big\{x \in X\colon\ f(x) > v\big\}.$$

Demostrar las siguientes propiedades de los conjuntos $A_{f,v}$.

- Si $v,w \in [0,+\infty]$ y $v \le w$, entonces

$$A_{f,v} \ \supseteq \ A_{f,w}.$$

- Si $v \in [0,+\infty[$, entonces

$$A_{f,v} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_{f,v+1/p}.$$

17 Ejercicio (las cotas superiores esenciales de una función medible respecto a una medida)**.** Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Denotemos por $\mathcal{U}(f, \mu)$ al conjunto de las *cotas superiores esenciales* de la función f respecto a la medida μ:

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \Big\{ v \in [0, +\infty] \colon \ \mu\big(\{x \in X \colon \ f(x) > v\}\big) = 0 \Big\}.$$

De manera equivalente,

$$\mathcal{U}(f, \mu) = \Big\{ v \in [0, +\infty] \colon \ \mu(A_{f,v}) = 0 \Big\},$$

$$\mathcal{U}(f, \mu) = \Big\{ v \in [0, +\infty] \colon \ f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{\leq} v \Big\}.$$

Pongamos

$$\alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Demostrar las siguientes propiedades del conjunto $\mathcal{U}(f, \mu)$.

- $+\infty \in \mathcal{U}(f, \mu)$.
- Si $\alpha = +\infty$, entonces $\mathcal{U}(f, \mu) = \{+\infty\}$.
- Si $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ y $w > v$, entonces $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$.
- Si $v > \alpha$, entonces $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$.
- $\alpha \in \mathcal{U}(f, \mu)$.

18 Ejercicio (el supremo esencial de una función medible respecto a una medida)**.** Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Pongamos

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Otra notación: $\operatorname{ess\,sup}_{X,\mu}(f)$. Demostrar que

$$\mathcal{U}(f, \mu) = \left[\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f, +\infty \right].$$

Sugerencia: este resultado sale del ejercicio anterior.

19 Ejercicio (el supremo esencial de una función es una de sus cotas superiores esenciales)**.** En el contexto del ejercicio anterior, notamos que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f \in \mathcal{U}(f, \mu).$$

Esto significa que

$$f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{\leq} \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f.$$

20 Ejercicio (otra descripción del supremo esencial de una función respecto a una medida)**.** Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Sea

$$A = \Big\{ v \in [0, +\infty] \colon\ \mu\big(\{x \in X \colon\ f(x) \geq v\}\big) > 0 \Big\}.$$

Demostrar que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = \sup(A).$$

21 Ejercicio (la propiedad subaditiva del supremo esencial de funciones positivas)**.** Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Demostrar que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f + g) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f) + \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(g).$$

22 Ejercicio (la propiedad homogénea del supremo esencial de funciones positivas)**.** Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sea $\lambda \in [0, +\infty[$. Demostrar que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(\lambda f) = \lambda \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f).$$

23 Ejercicio (el supremo esencial del supremo de una sucesión de funciones)**.** Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Definimos $g \colon X \to [0, +\infty]$,

$$g(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Pongamos

$$M \coloneqq \Big\{ \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f_n \colon \quad n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Demostrar que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} g = \sup(M).$$

El rango esencial y el supremo esencial (tareas adicionales)

Se supone que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

24 Definición (el rango esencial)**.** Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. El *rango esencial* de f se define de la siguiente manera:

$$\mathcal{ER}(f) = \Big\{ w \in \mathbb{C} \colon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu\big(\{x \in X \colon\ |f(x) - w| < \varepsilon\}\big) > 0 \Big\}.$$

25 Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demostrar que $\mathcal{ER}(f)$ es cerrado.

26 Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demostrar que

$$\mu\big(f^{-1}\big[\mathbb{C} \setminus \mathcal{ER}(f)\big]\big) = 0.$$

27 Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demostrar que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f| = \sup\{|w| \colon\ w \in \mathcal{ER}(f)\}.$$

Espacios $\mathcal{L}^p$

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

28 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty[$. Definimos $\mathcal{N}_p\colon\ \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \to [0, +\infty]$ por la fórmula (1). Ya sabemos que $\mathcal{N}_p$ es subaditiva y absolutamente homogénea. Por eso podemos decir que $\mathcal{N}_p$ es una seminorma extendida. Tenemos que decir "extendida" porque $\mathcal{N}_p$ puede ser igual a $+\infty$.

29 Ejercicio. Definimos $\mathcal{N}_\infty\colon\ \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \to [0, +\infty]$ mediante la siguiente regla:

$$\mathcal{N}_\infty(f) \coloneqq \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f|.$$

Demostrar que $\mathcal{N}_\infty$ es una seminorma extendida.

30 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty]$. Pongamos

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) \coloneqq \big\{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})\colon\ \mathcal{N}_p(f) < +\infty.$$

Explicar que $\mathcal{N}_p$ es una seminorma en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.

31 Ejercicio (¿cuándo se anula la seminorma $\mathcal{N}_p$?)**.** Sea

$$\mathcal{Z}(X, \mu) \coloneqq \big\{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})\colon\ f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0\big\}.$$

Sea $p \in [1, +\infty]$. Demostrar que

$$\big\{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})\colon \quad \mathcal{N}_p(f) = 0\big\} = \mathcal{Z}(X, \mu).$$

Definición de los espacios $\mathcal{L}^p$

32 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty]$. Demostrar que $\mathcal{Z}(X, \mu)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.

33 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty]$. Denotemos por $\sim$ la relación de congruencia en $\mathcal{L}^(X, \mu)$ asociada al subespacio $\mathcal{Z}(X, \mu)$:

$$f \sim g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f - g \in \mathcal{Z}(X, \mu).$$

Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

34 Ejercicio. Demostrar que si $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, y

$$f_1 \sim f_2, \qquad g_1 \sim g_2,$$

entonces

$$f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2, \qquad \lambda f_1 \sim \lambda f_2, \qquad \mathcal{N}_p(f_1) = \mathcal{N}_p(f_2).$$

35 Ejercicio (definición del espacio L^p)**.** El espacio normado $L^p(X, \mu)$ se define como el espacio cociente $\mathcal{L}^p(X, \mu)/\mathcal{Z}(X, \mu)$. Explicar de manera detallada la definición del conjunto $L^p(X, \mu)$, de las operaciones lineales en $L^p(X, \mu)$ y la definición de la norma $\|\cdot\|_p$ en $L^p(X, \mu)$.

Comparación de los espacios L^p con diferentes valores de p

36 Ejercicio (escala de los espacios $\mathcal{L}^p$ sobre un espacio de probabilidad)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$, sean $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ tales que $p_1 < p_2$ y sea $f \in \mathcal{L}^{p_2}(X, \mu)$. Demostrar que $f \in \mathcal{L}^{p_1}(X, \mu)$ y

$$\mathcal{N}_{p_1}(f) \le \mathcal{N}_{p_2}(f).$$

Sugerencia: aplicar el resultado del Ejercicio 6 con cierto p definido en términos de p_1 y p_2.

37 Ejercicio (escala de los espacios $\mathcal{L}^p$ sobre un espacio de medida finita)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita y sean $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ tales que $p_1 < p_2$. Demostrar que para cada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ se cumple la desigualdad

$$\mathcal{N}_{p_1}(f) \le c\mathcal{N}_{p_2}(f),$$

donde c es una constante que depende solamente de $\mu(X)$, p_1 y p_2. Hay que encontrar esta constante. Se recomienda considerar por separado los casos $p_2 < +\infty$ y $p_2 = +\infty$. Determinar, cuál de los dos conjuntos $\mathcal{L}^{p_1}(X, \mu)$ y $\mathcal{L}^{p_2}(X, \mu)$ está contenido en el otro.

38 Ejercicio (la seminorma norma $\mathcal{N}_\infty$ es el límite de las seminormas $\mathcal{N}_p$)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita y sea $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$. Demostrar que

$$\lim_{p \to +\infty} \mathcal{N}_p(f) = \mathcal{N}_\infty(f).$$

Sugerencia. En una parte de la solución puede ser útil suponer que $\mathcal{N}_\infty(f) > v$ y considerar el conjunto $A_{f,v} := \{x \in X\colon\ |f(x)| > v\}$.

Sucesiones regulares de Cauchy

Suponemos que (M, d) es un espacio métrico.

39 Ejercicio. Recordar la definición de sucesión de Cauchy.

40 Definición (sucesión regular de Cauchy)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (M, d). Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión *regular de Cauchy* si para cada n en $\mathbb{N}$

$$d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

41 Ejercicio (cada sucesión de Cauchy es una sucesión regular de Cauchy)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en (M, d). Demostrar que para todos m, n en $\mathbb{N}$

$$d(x_m, x_n) < \frac{1}{2^{\min\{m,n\}}}.$$

Deducir de aquí que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

42 Ejercicio (existencia de una subsucesión regular de Cauchy en una sucesión de Cauchy)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (M,d). Demostrar que existe una sucesión estrictamente creciente $\nu\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tal que $(x_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy, esto es, para cada k en $\mathbb{N}$ se cumple la desigualdada

$$d(x_{\nu_k}, x_{\nu_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

43 Ejercicio (convergencia de una sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (M,d) y sea $\nu\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ una sucesión creciente tal que $(x_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $a\in M$. Demostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto a.

44 Ejercicio (criterio de completez de espacios métricos, en términos de sucesiones regulares de Cauchy)**.** Sea (M,d) un espacio métrico. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) (M,d) es completo, esto es, cada sucesión de Cauchy tiene un límite en M;

(b) cada sucesión regular de Cauchy tiene tiene un límite en M.

Completez de los espacios L^p

En los siguientes ejercicios suponemos que $(X,\mathcal{F},\mu)$ es un espacio de medida.

45 Ejercicio (cada sucesión regular de Cauchy en L^∞ converge casi en todas partes)**.** Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $L^\infty(X,\mu)$. Para cada n en $\mathbb{N}$, sea $f_n\in F_n$. Demostrar que existe g en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ tal que

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g.$$

Este ejercicio se puede considerar como la primera parte de la demostración de la completez de $L^\infty(X,\mu)$.

46 Ejercicio (si una sucesión regular de Cauchy converge casi en todas partes, entonces convergen en la seminorma $\mathcal{N}_\infty$)**.** Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $L^\infty(X,\mu)$. Para cada n en $\mathbb{N}$, sea $f_n\in F_n$. Supongamos que $g\in\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ y

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g.$$

Demostrar que $\mathcal{N}_\infty(f_n-g)\to 0$. Sea $G\coloneqq g+\mathcal{Z}(X,\mu)$. Demostrar que $\|F_n-G\|_\infty\to 0$. Este ejercicio se puede considerar como la segunda parte de la demostración de la completez de $L^\infty(X,\mu)$.

47 Ejercicio (completez del espacio $L^\infty(X,\mu)$)**.** Demostrar que el espacio $L^\infty(X,\mu)$ es completo usando los resultados de los Ejercicios 45 y 46.

48 Ejercicio (la convergencia en $\mathcal{L}^p$, $p < +\infty$, implica la convergencia en medida)**.** Sean $p \in [1, +\infty[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ y $g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$. Supongamos que $\mathcal{N}_p(f_n - g) \to 0$. Demostrar que $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

49 Ejercicio (si una sucesión es de Cauchy en $\mathcal{L}^p$, $p < +\infty$, entonces de Cauchy en medida)**.** Sea $p \in [1, +\infty[$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$. Demostrar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en medida.

50 Ejercicio (repaso: si una sucesión es de Cauchy en medida, entonces contiene una subsucesión que converge casi uniformemente)**.** Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mu, \mathbb{C})$ tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida. Demostrar que existe una sucesión estrictamente creciente $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y una función g de clase $\mathcal{M}(X, \mu, \mathbb{C})$ tales que

$$f_{\nu(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{\mu\text{-c.u.}} g.$$

51 Ejercicio (si una sucesión es de Cauchy en $\mathcal{L}^1$ y converge casi en todas partes, entonces la convergencia también es en la seminorma $\mathcal{N}_1$)**.** Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ y sea $g \in \mathcal{M}(X, \mu, \mathbb{C})$. Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$. Demostrar que $\mathcal{N}_1(f_n - g) \to 0$ cuando $n \to \infty$ y que $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$.

52 Ejercicio (si una sucesión es de Cauchy en $\mathcal{L}^p$ y converge casi en todas partes, entonces la convergencia también es en la seminorma $\mathcal{N}_p$)**.** Sea $p \in [1, +\infty[$, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ y sea $g \in \mathcal{M}(X, \mu, \mathbb{C})$. Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$. Demostrar que $\mathcal{N}_p(f_n - g) \to 0$ cuando $n \to \infty$ y que $g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$.

53 Ejercicio (completez del espacio L^p)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Demostrar que el espacio $L^1(X, \mu)$ es completo.

54 Ejercicio (si una sucesión converge en L^p, entonces existe una subsucesión que converge c.t.p.)**.** Sea $p \in [1, +\infty]$, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ y sea $g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$. Supongamos que $\mathcal{N}_p(f_n - g) \to 0$. Demsotrar que existe una sucesión estrictamente creciente $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Aproximación por funciones simples

55 Definición (funciones simples que se anulan fuera de conjuntos de medida finita)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Denotemos por $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ al conjunto de todas las funciones $\mathcal{F}$-medibles cuyo conjunto de valores es finito. Pongamos

$$\mathcal{S}_1 \coloneqq \{f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})\colon\ \mu(\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\}) < +\infty\}.$$

56 Ejercicio (funciones simples medibles p-integrables)**.** Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y sea $1 \le p < +\infty$. Demostrar que

$$\mu(\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\}) < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{N}_p(f) < +\infty.$$

57 Ejercicio. Demostrar que $\mathcal{S}_1$ es un subespacio de $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

58 Ejercicio. Demostrar que $\mathcal{S}_1$ es la envoltura lineal (es decir, el subespacio vectorial generado por) del conjunto

$$\{1_A\colon\ A\in\mathcal{F},\ \mu(A)<+\infty\}.$$

59 Ejercicio (densidad de las funciones simples en L^p, para $1\le p<+\infty$)**.** Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida y sea $1\le p<+\infty$. Demostrar que $\mathcal{S}_1$ es denso en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Aproximación por funciones continuas

60 Ejercicio (medidas regulares)**.** Recordar la definición de medida regular.

61 Ejercicio (medida de Radon)**.** Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto. Sea $\mathcal{F}\subseteq 2^X$ una σ-álgebra que contiene a todos los conjuntos de Borel y sea $\mu\colon\mathcal{F}\to[0,+\infty]$ una medida. ¿Cuándo se dice que μ es una medida de Radon?

62 Ejercicio (teorema sobre la densidad de las funciones continuas de soporte compacto en $\mathcal{L}^p$, para $1\le p<+\infty$)**.** Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, y sea μ una medida de Radon en X. Sea $1\le p<+\infty$. Demostrar que el conjunto $C_c(X,\mathbb{C})$ es denso en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

63 Ejercicio (teorema de Luzin)**.** Sea X un espacio espacio de Hausdorff localmente compacto con una medida regular μ. Sean $f\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C})$, $Y\in\mathcal{F}$ tal que $\mu(Y)<+\infty$ y $f(x)=0$ para cada x en $X\setminus Y$. Sea $\varepsilon>0$. Demostrar que existen g en $C_c(X)$ y E en $\mathcal{F}$ tales que $\mu(E)<\varepsilon$, $f(x)=g(x)$ para cada x en $X\setminus E$ y $\mathcal{N}_\infty(g)\le\mathcal{N}_\infty(f)$.