Espacios L^p

Problemas para examen

Desigualdad de Hölder

1. Desigualdad de Young. Sean $a, b \geq 0$ y sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Recuerde alguna demostración de la siguiente desigualdad:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Sugerencia: se puede usar la convexidad de la función exponencial.

2. El caso de igualdad en la desigualdad de Young. Sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Determine qué condición deben satisfacer a y b para que se cumpla la igualdad

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Sugerencia: se puede usar la convexidad estricta de la función exponencial.

3. Desigualdad de Hölder. Enuncie y demuestre la desigualdad de Hölder. Sugerencia: después de quitar los casos triviales cuando las cantidades $\|f\|_p$ y $\|g\|_q$ son iguales a cero o infinitas, considerar las funciones

$$u(x) := \frac{1}{\|f\|_p} f(x), \qquad v(x) := \frac{1}{\|g\|_q} g(x),$$

aplicar la desigualdad de Young a los números $u(x)$ y $v(x)$ e integrar sobre X.

4. Desigualdad de Hölder, cuando la segunda función es la constante 1. Aplique la desigualdad de Hölder al caso cuando g es la constante 1, y demuestre una desigualdad de la forma

$$\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu \leq c\|f\|_p,$$

donde c es cierta constante que depende de μ y de p (hay que encontrar c).

5. El caso de igualdad en la desigualdad de Hölder. Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tales que $0 < \|f\|_p < +\infty$, $0 < \|g\|_q < +\infty$ y

$$\|fg\|_1 = \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Demuestre que existe $\alpha > 0$ tal que en μ-casi todas partes se cumple la igualdad $f^p = \alpha g^q$. Sugerencia: repasar el razonamiento sugerido en el Problema 3, notar que ciertas integrales son iguales, restarlas, concluir que cierta función es cero casi en todas partes, y usar el resultado del Problema 2.

6. El teorema inverso de Hölder. Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sea $f \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ tal que $\|f\|_p > 0$. Construya $g \in L^q(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ tal que $\|g\|_q = 1$ y $\|fg\|_1 = \|f\|_p$.

7. Desigualdad de Minkowski. Enuncie y demuestre la desigualdad de Minkowski.

8. El caso de igualdad en la desigualdad de Minkowski. Sea $p \in [1, +\infty)$. Determine cuándo la desigualdad de Minkowski se convierte en una igualdad. En otras palabras, encuentre una condición necesaria y suficiente para que $\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$.

9. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$, sean $f, g\colon X \to (0, +\infty)$ funciones positivas μ-medibles tales que $f(x)g(x) \geq 1$ para todo $x \in X$. Demuestre que

$$\int\limits_X f\, d\mu \cdot \int\limits_X g\, d\mu \geq 1.$$

10. Desigualdad de Hardy (tarea adicional). Sea $f \in L^p((0, +\infty), \mu, [0, +\infty])$, donde $p \in (1, +\infty)$ y μ es la medida de Lebesgue. Definamos $g\colon (0, +\infty) \to [0, +\infty]$ mediante la fórmula

$$g(x) \coloneqq \frac{1}{x} \int\limits_0^x f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Demuestre que

$$\int\limits_0^{+\infty} g(x)^p\, \mathrm{d}x \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int\limits_0^{+\infty} f(x)^p\, \mathrm{d}x.$$

El supremo esencial de una función positiva medible

11. Acerca de la definición del supremo esencial de una función. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Denotemos por B al conjunto de las cotas superiores esenciales de la función f:

$$B \coloneqq \Big\{ b \in [0, +\infty]\colon\ \mu\big(\{x \in X\colon\ f(x) > b\}\big) = 0 \Big\}.$$

Demuestre que $\inf(B) \in B$, esto es, $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{\leq} \inf(B)$.

12. El supremo esencial de una función positiva. En la notación del ejercicio anterior, $\operatorname{ess\,sup}(f)$ se define como $\inf(B)$.

13. Otra descripción del supremo esencial de una función. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Sea c el supremo esencial de f y sea

$$A = \Big\{ \alpha \in [0, +\infty] \colon \ \mu\big(\{x \in X \colon \ f(x) \geq \alpha\}\big) > 0 \Big\}.$$

Demuestre que $c = \sup(A)$.

14. Propiedad subaditiva del supremo esencial. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Demuestre que

$$\operatorname{ess\,sup}(f + g) \leq \operatorname{ess\,sup}(f) + \operatorname{ess\,sup}(g).$$

Rango esencial y supremo esencial (tareas adicionales)

Se supone que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

Definición (rango esencial). Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. El *rango esencial* de f se define de la siguiente manera:

$$\mathcal{ER}(f) = \Big\{ w \in \mathbb{C} \colon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu\big(\{x \in X \colon \ |f(x) - w| < \varepsilon\}\big) > 0 \Big\}.$$

15. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demuestre que el $\mathcal{ER}(f)$ es cerrado.

16. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demuestre que

$$\operatorname{ess\,sup} |f| = \sup\{|w| \colon \ w \in \mathcal{ER}(f)\}.$$

Espacios L^p

17. La convergencia en L^p implica la convergencia en medida. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $p \in [1, +\infty)$ y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(X, \mu, \mathbb{C})$, $g \in L^p(X, \mu, \mathbb{C})$, tales que $\|f_n - g\|_p \to 0$. Demuestre que $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

18. Propiedad subaditiva de la pseudonorma en L^∞. Escriba la definición de la pseudonorma $\|\cdot\|_\infty$ y demuestre que esta cumple con la propiedad subaditiva.

19. Escala de los espacios L^p sobre un espacio de probabilidad. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$, sean $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ tales que $p_1 < p_2$ y sea $f \in L^{p_2}(X, \mu, \mathbb{C})$. Demuestre que $f \in L^{p_1}(X, \mu, \mathbb{C})$ y

$$\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2}.$$

Sugerencia: aplique el resultado del Ejercicio 4 con cierto p definido en términos de p_1 y p_2.

20. Escala de los espacios L^p sobre un espacio de medida finita. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita y sean $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ tales que $p_1 < p_2$. Demuestre que para cada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$

$$\|f\|_{p_1} \leq c\|f\|_{p_2},$$

donde c es una constante que depende solo de $\mu(X)$, p_1 y p_2 (hay que encontrar esta constante). Se recomienda considerar por separado los casos $p_2 < +\infty$ y $p_2 = +\infty$. Compare los siguientes dos conjuntos (ponga $\subseteq$ o $\supseteq$):

$$L^{p_1}(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty]), \qquad L^{p_2}(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty]).$$

21. La norma $\|\cdot\|_\infty$ como el límite de las normas $\|\cdot\|_p$. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita y sea $f \in L^\infty(X, \mu)$. Demuestre que

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Sugerencia: en una parte de la solución puede ser útil suponer que $v < \|f\|_\infty$ y considerar el conjunto $A \coloneqq \{x \in X \colon\ |f(x)| \geq v\}$.

Sucesiones regulares de Cauchy

Suponemos que (M, d) es un espacio métrico.

Definición (sucesión regular de Cauchy). Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en (M, d). Se dice que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión *regular de Cauchy* si para todo $n \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

22. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en (M, d). Demuestre que para todos $m, n \in \mathbb{N}$

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{2^{\min\{m,n\}}}.$$

Deduzca de aquí que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

23. Existencia de una subsucesión regular de Cauchy en una sucesión de Cauchy. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (M, d). Demuestre que existe una sucesión estrictamente creciente $\nu \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $(x_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy, esto es, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$d(x_{\nu_k}, x_{\nu_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}.$$

24. Convergencia de una sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (M,d) y sea $\nu\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ una sucesión creciente tal que $(x_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $a\in M$. Demuestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto a.

25. Criterio de que un espacio métrico es completo. Sea (M,d) un espacio métrico. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) (M,d) es completo, esto es, toda sucesión de Cauchy tiene un límite en M;

(b) toda sucesión sucesión regular de Cauchy tiene tiene un límite en M.

Completitud de los espacios L^p

26. Completitud del espacio L^∞. Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio con medida. Demuestre que el espacio $L^\infty(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$ es completo. Se recomienda hacer la demostración en dos etapas.

I. Dada una sucesión de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $L^\infty(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$, construir una función g tal que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

II. En la notación del inciso I, demostrar que $g\in L^\infty(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$ y $\|f_n-g\|_\infty\to 0$.

27. Completitud del espacio L^1. Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida. Demuestre que el espacio $L^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$ es completo. Se recomienda hacer la demostración en dos etapas.

I. Dada una sucesión regular de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $L^\infty(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$, construir una función g tal que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

II. En la notación del inciso I, demostrar que $g\in L^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$ y $\|f_n-g\|_1\to 0$.

28. Si una sucesión converge en L^1, entonces existe una subsucesión que converge c.t.p.. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^1(X,\mathcal{F},\mu\mathbb{C})$ y sea $g\in L^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$. Supongamos que $\|f_n-g\|_1\to 0$. Demuestre que existe una sucesión estrictamente creciente $\nu\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tal que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

29. Completitud de los espacios L^p. Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida y sea $p\in(1,+\infty)$. Demuestre que el espacio $L^p(X,\mathcal{F},\mu)$ es completo usando el hecho que $L^1(X,\mathcal{F},\mu)$ es completo.

30. Generalice el resultado del Problema 28 a espacios L^p con $1\le p<+\infty$.

Aproximación por funciones simples

31. Funciones simples que se anulan fuera de conjuntos de medida finita. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Denotemos por $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ al conjunto de todas las funciones $\mathcal{F}$-medibles cuyo conjunto de valores es finito. Pongamos

$$\mathcal{S}_1 \coloneqq \{f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})\colon\ \mu(\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\}) < +\infty\}.$$

32. Funciones simples medibles integrables. Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y sea $1 \leq p < +\infty$. Demuestre que

$$\mu(\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\}) < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|f\|_p < +\infty.$$

33. Demuestre que $\mathcal{S}_1$ es un espacio vectorial.

34. Demuestre que $\mathcal{S}_1$ es la envoltura lineal (es decir, el subespacio vectorial generado por) del conjunto

$$\{1_A\colon\ A \in \mathcal{F},\ \mu(A) < +\infty\}.$$

35. Densidad de las funciones simples en L^p, para $1 \leq p < +\infty$. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Demuestre que $\mathcal{S}_1$ es denso en $L^p(X, \mu, \mathbb{C})$.

Aproximación por funciones continuas

36. Medidas regulares. Recuerde la definición de medida regular.

37. Teorema sobre la densidad de las funciones continuas de soporte compacto en L^p, para $1 \leq p < +\infty$. Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, sea $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ una σ-álgebra que contiene a todos los conjuntos de Borel y sea $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ una medida regular. Demuestre que para todo $p \in [1, +\infty)$ el conjunto $C_c(X, \mathbb{C})$ es denso en $L^1(X, \mu, \mathbb{C})$.

38. Teorema de Luzin. Sea X un espacio espacio de Hausdorff localmente compacto con una medida regular μ. Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(Y) < +\infty$ y $f(x) = 0$ para cada x en $X \setminus Y$. Sea $\varepsilon > 0$. Demuestre que existen g en $C_c(X)$ y E en $\mathcal{F}$ tales que $\mu(E) < \varepsilon$, $f(x) = g(x)$ para cada x en $X \setminus E$ y $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.