Espacios de Hilbert

Problemas para examen

En todos los ejercicios de esta lista, si no está escrita otra suposición, suponemos que H es un espacio vectorial complejo con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En la definición del producto interno pedimos la propiedad lineal respecto al primer argumento y la propiedad lineal conjugada respecto al segundo argumento. Un *espacio de Hilbert* definimos como un espacio complejo con producto interno, completo respecto a la norma inducida (no pedimos que sea de dimensión infinita ni que sea separable). Hablando de *subespacios* de espacios de Hilbert, usamos esta palabra en el sentido puramente algebraico (el subespacio no necesariamento es cerrado).

Propiedades elementales de formas sesquilineales

En esta sublista de ejercicios, suponemos que H es un espacio vectorial complejo y f es una forma sesquilineal en H, esto es, $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$, la función f es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo argumento.

1 Ejercicio. Usando la inducción matemática muestre que para cada m en $\mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, \ldots, a_m$ en H, cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ en $\mathbb{C}$ y cualquier b en H,

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, b\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(a_j, b).$$

2 Ejercicio. Demuestre que para cada n en $\mathbb{N}$, cualquier a en H, cualesquiera $b_1, \ldots, b_n$ en $\mathbb{N}$ y cualesquiera $\mu_1, \ldots, \mu_n$ en H,

$$f\left(a, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mu_k} f(a, b_k).$$

3 Ejercicio. Demuestre que para cada m, n en $\mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ en H y cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n$ en $\mathbb{C}$,

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \overline{\mu_k} f(a_j, b_k).$$

4 Ejercicio. Sea $A \subseteq H$. Muestre que el conjunto $\{b \in H\colon\ \forall a \in A\ f(a,b) = 0\}$ es un subespacio de H.

5 Ejercicio. Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in H$, $S = \ell(a_1, \ldots, a_m)$. Muestre que

$$\{b \in H\colon \quad \forall s \in S \quad f(s,b) = 0\} = \{b \in H\colon \quad \forall k \in \{1, \ldots, m\} \quad f(a_k, b) = 0\}.$$

6 Ejercicio (la identidad de paralelogramo para formas sesquilineales)**.** Sea $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Denotemos por q a la *forma cuadrática* asociada a f:

$$q\colon H \to \mathbb{C}, \qquad q(x) \coloneqq f(x,x) \qquad (x \in H).$$

Muestre que

$$q(a+b) + q(a-b) = 2(q(a) + q(b)).$$

7 Ejercicio (la propiedad homogénea absoluta de orden 2 para formas cuadráticas)**.** Sea $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Denotemos por q a la *forma cuadrática* asociada a f. Muestre que para cada a en H y cada λ en $\mathbb{C}$

$$q(\lambda a) = |\lambda|^2 q(a).$$

8 Ejercicio (la identidad de polarización para formas sesquilineales)**.** Sea $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Denotemos por q a la forma cuadrática asociada a f. Sean $a, b \in H$. Demuestre que

$$f(a,b) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q(a + \mathrm{i}^k\, b).$$

Sugerencia. Primero verificar que

$$\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k = 0, \qquad \sum_{k=0}^{3} (-1)^k = 0.$$

Propiedades elementales del producto interno

9 Ejercicio. Escriba la definición del producto interno y la definición del preproducto interno.

10 Ejercicio. Muestre que si $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H^2 \to \mathbb{C}$ es una función lineal respecto al primer argumento y hermítica (es decir, $\langle b, a\rangle = \overline{\langle a, b\rangle}$ para todo a, b en H), entonces esta función es lineal conjugada respecto al segundo argumento.

11 Ejercicio. Usando la inducción matemática muestre que para cada m en $\mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, \ldots, a_m$ en H, cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ en $\mathbb{C}$ y cualquier b en H,

$$\left\langle \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, b \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle a_j, b \rangle.$$

12 Ejercicio. Demuestre que para cada n en $\mathbb{N}$, cualquier a en H, cualesquiera $b_1, \ldots, b_n$ en $\mathbb{N}$ y cualesquiera $\mu_1, \ldots, \mu_n$ en H,

$$\left\langle a, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mu_k} \langle a, b_k \rangle.$$

13 Ejercicio. Demuestre que para cada m, n en $\mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ en H y cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n$ en $\mathbb{C}$,

$$\left\langle \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \overline{\mu_k} \langle a_j, b_k \rangle.$$

14 Definición. Sean $a, b \in H$. Decimos que a y b son *ortogonales* y escribimos $a \perp b$ si $\langle a, b \rangle = 0$.

15 Ejercicio. Sea $A \subseteq H$. Escriba la definición del conjunto $A^{\perp}$.

16 Ejercicio. Sea $A \subseteq H$. Muestre que $A^{\perp}$ es un subespacio de H.

17 Ejercicio. Muestre que $H^{\perp} = \{0_H\}$ y que $\{0_H\}^{\perp} = H$.

18 Ejercicio. Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in H$, $S = \ell(a_1, \ldots, a_m)$. Muestre que $S^{\perp} = \{a_1, \ldots, a_m\}^{\perp}$.

Proyección ortogonal de un vector sobre el subespacio generado por una lista ortogonal de vectores

19 Ejercicio. Sean $v \in H$ y $a \in H \setminus \{0_H\}$. Pongamos $S = \ell(a)$. Muestre que existe un único par de vectores (u, w) tal que $u \in S$, $w \in S^{\perp}$ y $v = u + w$.

20 Ejercicio (expresión de los coeficientes de una combinación lineal a través del producto interno)**.** Sea m en $\mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m$ una lista ortogonal de vectores no nulos en H y u una combinación lineal de estos vectores:

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Muestre que para cada j en $\{1, \ldots, m\}$

$$\lambda_j = \frac{\langle u, a_j \rangle}{\langle a_j, a_j \rangle}.$$

21 Ejercicio (independencia lineal de vectores ortogonales no nulos)**.** Sea m en $\mathbb{N}$ y sea $a_1, \ldots, a_m$ una lista de vectores ortogonales no nulos. Demuestre que la lista $a_1, \ldots, a_m$ es linealmente independiente.

22 Ejercicio. Sean $v \in H$, $m \in \mathbb{N}$ y sea $a_1, \ldots, a_m$ una lista ortogonal de vectores no nulos en H. Pongamos $S = \ell(a_1, \ldots, a_m)$. Muestre que existe un único par de vectores (u, w) tal que $u \in S$, $w \in S^\perp$ y $v = u + w$.

Desigualdad de Schwarz; la norma inducida por un producto interno

23 Ejercicio (teorema de Pitágoras para la suma de dos vectores ortogonales en un espacio con producto interno)**.** Sean $a, b \in H$ tales que $a \perp b$. Demuestre que

$$\langle a + b, a + b \rangle = \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle.$$

24 Ejercicio (la longitud del cateto es menor o igual que la longitud de la hipotenusa)**.** Sean $a, b \in H$ tales que $a \perp b$. Demuestre que

$$\langle a + b, a + b \rangle \geq \langle a, a \rangle.$$

25 Ejercicio (¿cuándo el cateto es igual a la hipotenusa?)**.** Sean $a, b \in H$ tales que $a \perp b$ y

$$\langle a + b, a + b \rangle = \langle a, a \rangle.$$

Muestre que $b = 0_H$.

26 Ejercicio (la desigualdad de Schwarz)**.** Sean $a, b \in H$. Demuestre que

$$|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle.$$

Sugerencia: en el caso $a = 0_H$ el resultado es trivial; en el caso $a \neq 0_H$ usar el resultado del Ejercicio 19 y aplicar el resultado del Ejercicio 24 a los vectores ortogonales u y w.

27 Ejercicio (igualdad en la desigualdad de Schwarz)**.** Sean $a, b \in H$ tales que

$$|\langle a, b \rangle|^2 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle.$$

Muestre que los vectores a y b son linealmente dependientes.

28 Ejercicio (la norma inducida por un producto interno)**.** Definimos $N\colon H \to [0,+\infty)$ mediante la regla

$$N(a) \coloneqq \sqrt{\langle a, a\rangle}.$$

Muestre que N es una norma en H, esto es, N es subaditiva, absolutamente homogénea y $N(a) > 0$ para cada a en $H \setminus \{0_H\}$. Después de verificar estas propiedades, escribimos $\|a\|$ en vez de $N(a)$.

29 Ejercicio. Sean $a, b \in H$ tales que

$$\|a + b\| = \|a\| + \|b\|.$$

Demuestre que los vectores a y b son codirigidos, esto es, $a = 0_H$ o existe $\lambda \geq 0$ tal que $b = \lambda a$.

30 Ejercicio (continuidad del producto interno)**.** Muestre que la función $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es continua. El dominio $H \times H$ se considera con la topología del producto de espacios topológicos. En otras palabras, muestre que para cada $a, b \in H$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada u, v en H con $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, se cumple la desigualdad

$$|\langle u, v\rangle - \langle a, b\rangle| < \varepsilon.$$

Sugerencia: restar y sumar $\langle u, b\rangle$, luego aplicar la desigualdad de Schwarz.

31 Ejercicio (continuidad del producto interno en términos de sucesiones)**.** Sean $a, b \in H$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H que converge al vector a, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H que converge al vector b. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle a, b\rangle.$$

32 Ejercicio (la cerradura de cualquier subespacio vectorial es un subespacio vectorial)**.** Sea S un subespacio vectorial de H. Demostrar que $\operatorname{clos}(S)$ es un subespacio vectorial de H. Este resultado es cierto no solamente en espacios con producto interno, sino también en espacios normados.

33 Ejercicio (la cerradura del subespacio generado por un conjunto de vectores)**.** Sea $X \subseteq H$. Demuestre que $\operatorname{clos}(\ell(X))$ es el mínimo entre los subespacios cerrados que contienen a X. Este resultado es cierto no solamente en espacios con producto interno, sino también en espacios normados.

Ejemplos de espacios de Hilbert

34 Ejercicio. Definir el producto interno canónico en $\ell^2(\mathbb{N})$ y explicar por qué $\ell^2(\mathbb{N})$ es un espacio de Hilbert.

35 Ejercicio. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Definir el producto interno canónico en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ y explicar por qué este espacio es un espacio de Hilbert.

Algunos otros espacios de Hilbert importantes que no consideramos en estos ejercicios: el espacio de Bergman de funciones analíticas en un dominio y cuadrado integrables, el espacio de Bargmann–Segal–Fock de funciones analíticas en el plano y cuadrado integrables con el peso gaussiano, el espacio de Hilbert asociado a un proceso estocástico (teoría de Karhunen–Loève). Los espacios mencionados son *espacios de Hilbert con núcleo reproductor.*

Identidad de paralelogramo, identidad de polarización y teorema de Pitágoras

36 Ejercicio (identidad de paralelogramo)**.** Sean $a, b \in H$. Demuestre que

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

37 Ejercicio (identidad de Apollonius)**.** Sean $a, b \in H$. Demuestre que

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 2\left\|\frac{a + b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a - b\|^2.$$

Sugerencia: deducir esta identidad de la identidad de paralelogramo.

38 Ejercicio (identidad de polarización)**.** Sean $a, b \in H$. Demuestre que

$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, \|a + \mathrm{i}^k\, b\|^2.$$

39 Ejercicio (teorema de Pitágoras para la suma de dos vectores ortogonales en un espacio con producto interno)**.** Sean $a, b \in H$ tales que $a \perp b$. Demuestre que

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

40 Ejercicio (teorema de Pitágoras para una suma finita de vectores ortogonales en un espacio con producto interno)**.** Sean $m \in \mathbb{N}$ y sea $a_1, \ldots, a_m$ una lista ortogonal en H. Demuestre que

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} a_j \right\| = \sum_{j=1}^{m} \|a_j\|^2.$$

41 Ejercicio (criterio para que una función lineal entre espacios con producto interno sea isometría)**.** Sean H_1, H_2 espacios con productos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, respectivamente. Denotamos por $\| \cdot \|_1$ y $\| \cdot \|_2$ a las normas inducidas y por d_1, d_2 a las distancias inducidas. Sea $A \colon H_1 \to H_2$ una transformación lineal. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) A preserva el producto interno:

$$\forall x, y \in H_1 \qquad \langle Ax, Ay \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1.$$

(b) A preserva la norma:

$$\forall x \in H_1 \qquad \|Ax\|_2 = \|x\|_1.$$

(c) A preserva la distancia (en otras palabras, A es isometría):

$$\forall x, y \in H_1 \qquad d_2(Ax, Ay) = d_1(x, y).$$

Convexidad estricta de las bolas en espacios con producto interno

Sea V un espacio normado. Un conjunto $A \subseteq V$ se llama *convexo* si para cada a, b en A y cada λ en $[0, 1]$ se tiene que

$$(1 - \lambda)a + \lambda b \in A.$$

Un conjunto $A \subseteq V$ se llama *estrictamente convexo* si para cada a, b en A, tales que $a \neq b$, y cada λ en $(0, 1)$ se tiene que

$$(1 - \lambda)a + \lambda b \in \operatorname{int}(A).$$

En la solución de los siguientes ejercicios es cómodo usar la identidad de paralelogramo (o la identidad de Apollonius).

42 Ejercicio. Sean $a, b \in H$, $r > 0$, tales que $\|a\| \le r$, $\|b\| \le r$, $a \ne b$. Demuestre que $\|a + b\| < r$.

43 Ejercicio. Sea $r > 0$. Demuestre que el conjunto $\{a \in H\colon\ \|a\| \le r\}$ es estrictamente convexo.

44 Ejercicio. Sea $\delta > 0$ y sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en H tales que $\|a_n\| \to \delta$, $\|b_n\| \to \delta$, y

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left\|\frac{a_n + b_n}{2}\right\| \ge \delta.$$

Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \|a_n - b_n\| = 0$.

El elemento de norma mínima en un conjunto convexo cerrado no vacío

Suponemos que H es un espacio de Hilbert.

45 Ejercicio. Sea X un subconjunto de H, cerrado, convexo y no vacío. Demuestre que existe un elemento x en X tal que para cada y en $X \setminus \{x\}$ se cumple la desigualdad $\|x\| < \|y\|$. Sugerencia: poner

$$\delta := d(X, 0_H) = \inf_{y\in X} \|y\|,$$

considerar una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H tal que $\|a_n\| \to \delta$, y demostrar que esta sucesión es de Cauchy. Usar la identidad de Apollonius, igual que en la solución del Ejercicio 44.

46 Ejercicio. Sea S un subconjunto de H, cerrado, convexo y no vacío, y sea v un elemento de H. Demuestre que existe un elemento x en S tal que para cada y en $S \setminus \{x\}$ se cumple la desigualdad $\|x - v\| < \|y - v\|$.

Proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado

47 Ejercicio. Sea S un subespacio cerrado de H y sea $v \in H$. Muestre que existe un único par de vectores (u, w) tal que $u \in S$, $w \in S^\perp$ y $v = u + w$.

48 Ejercicio (propiedades de la proyección ortogonal)**.** Sea S un subespacio cerrado de H. Para cada v en H denotemos por $P_S(v)$ al vector u del ejercicio anterior. Demuestre las siguientes propiedades de la función P_S.

1. $P_S \in \mathcal{B}(H)$ y $\|P_S\| \le 1$.

2. $P_S^2 = P_S$.

3. $\langle P_S a, b\rangle = \langle a, P_S b\rangle$ para cada a, b en H.

4. La imagen de P_S es S.

5. El núcleo de P_S es $S^\perp$.

Propiedades principales de la operación "complemento ortogonal"

49 Ejercicio. Sean $X, Y \subseteq H$ tales que $0_H \in X$, $0_H \in Y$. Demuestre que $(X+Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$.

50 Ejercicio. Sea $X \subseteq H$. Muestre que $X^\perp$ es un subespacio cerrado de H.

51 Ejercicio. Sea $X \subseteq H$. Muestre que $X^\perp = (\operatorname{clos}(\ell(X)))^\perp$.

52 Ejercicio. Sea S un subespacio cerrado de H. Muestre que $(S^\perp)^\perp = S$.

53 Ejercicio. Sea $X \subseteq H$. Muestre que $(X^\perp)^\perp = \operatorname{clos}(\ell(X))$.

Representación de funcionales lineales acotados en espacios de Hilbert

54 Ejercicio. Sea $g \in H$. Definimos $\varphi_g \colon H \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\varphi_g(f) \coloneqq \langle f, g\rangle.$$

Demuestre que $\varphi_g \in H^*$ y que $\|\varphi_g\| = \|g\|$.

En los siguientes cuatro ejercicios usamos la misma notación φ_g.

55 Ejercicio. Sea $g \in H$. Demuestre que

$$g \perp \ker(\varphi_g), \qquad \varphi_g(g) = \|g\|^2.$$

56 Ejercicio. Sea $\psi \in H^*$, $\psi \neq 0_{H \to \mathbb{C}}$, y sea $g \in H$ tal que

$$g \perp \ker(\psi), \qquad \psi(g) = \|g\|^2.$$

Demuestre que $\psi = \varphi_g$.

57 Ejercicio (teorema de Fréchet–Riesz sobre la representación de funcionales lineales acotados en espacios de Hilbert)**.** Sea $\psi \in H^*$. Demuestre que existe un único vector g en H tal que $\psi = \varphi_g$.

58 Ejercicio (correspondencia canónica entre los vectores y los funcionales lineales acotados en espacios de Hilbert)**.** Definimos $\Phi\colon H \to H^*$ mediante la regla $\Phi(g) := \varphi_g$. Demuestre que la función Φ es biyectiva, lineal conjugada e isométrica.

59 Ejercicio (descripción del espacio bidual de un espacio de Hilbert)**.** Definimos $\Lambda\colon H \to H^{**}$ de la siguiente manera. Para cada g en H y cada ψ en H^*,

$$(\Lambda(g))(\psi) := \psi(g).$$

Demostrar que la función Λ es sobre. Como ya sabemos para cualquier espacio de Banach, la función Λ es lineal e isométrica, por eso inyectiva. Por consecuencia, Λ es un isomorfismo isométrico.

Proceso de ortogonalización de Gram y Schmidt

60 Ejercicio. Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ una lista linealmente independiente en H. Para cada p en $\{1, \ldots, m\}$ pongamos

$$b_p = a_p - \sum_{k=1}^{p-1} \langle a_p, u_k \rangle u_k, \qquad u_p = \frac{b_p}{\|b_p\|}.$$

Muestre que los vectores $b_1, \ldots, b_m$ son ortogonales a pares y no nulos, que los vectores $u_1, \ldots, u_m$ son ortonormales, que para cada p en $\{1, \ldots, m\}$

$$\ell(a_1, \ldots, a_p) = \ell(b_1, \ldots, b_p),$$

y que

$$b_p = a_p - P_{\ell(a_1, \ldots, a_{p-1})} a_p.$$

Sumas de sucesiones ortogonales de vectores

61 Ejercicio (convergencia de series de vectores ortogonales)**.** Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortogonal en H. Demuestre que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge si, y solo si,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < +\infty.$$

Sugerencias. Denotemos por s_m a la m-ésima suma parcial. En la parte de suficiencia demostrar que la sucesión $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. En la parte de necesidad demostrar que

$$\|s_m\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2,$$

y pasar al límite cuando $m \to \infty$.

62 Ejercicio (teorema de Pitágoras para series de vectores ortogonales)**.** Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortogonal en H tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < +\infty,$$

y sea

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Demuestre que

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

Sucesiones ortonormales de vectores

63 Ejercicio (desigualdad de Bessel)**.** Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$. Muestre que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle v, a_k\rangle|^2 \le \|v\|^2.$$

64 Ejercicio. Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$. Muestre que la siguiente serie converge en H:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \langle v, a_k\rangle a_k.$$

65 Ejercicio (proyección ortogonal de un vector sobre el subespacio generado por una sucesión ortonormal)**.** Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$. Denotemos por S a la cerradura del subespacio vectorial generado por $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$. Pongamos

$$u \coloneqq \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle v, a_k\rangle a_k, \qquad w \coloneqq v - u.$$

Muestre que $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$.

66 Ejercicio (criterio de pertenencia de un vector al subespacio cerrado generado por una sucesión ortonormal)**.** Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$. Denotemos por S a la cerradura del subespacio vectorial generado por $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $v \in S$.

(b) Existe una sucesión $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}$ tal que $v = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$.

(c) $v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k\rangle a_k$.

(d) $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k\rangle|^2$.

Bases ortonormales

67 Ejercicio. Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H. Denotemos por S a la cerradura del subespacio vectorial generado por $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $S = H$.

(b) Para cada v en H, existe una sucesión $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}$ tal que $v = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$.

(c) Para cada v en H, $v = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle v, a_k\rangle a_k$.

(d) Para cada v en H, $\|v\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle v, a_k\rangle|^2$.

(e) Para cada v en H, si $\langle v, a_k\rangle = 0$ para cada k en $\mathbb{N}$, entonces $v = \{0_H\}$.

Decimos que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortogonal (o base de Hilbert) de H si se cumplen estas condiciones.

68 Ejercicio. Sean $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H y $\psi \in H^*$. Pongamos

$$g = \sum_{k\in\mathbb{N}} \overline{\psi(a_k)} a_k.$$

Muestre que $\psi(f) = \langle f, g\rangle$ para cada f en H.

69 Ejercicio. Supongamos que H es un espacio de Hilbert separable y D es un subconjunto numerable denso de H. Muestre cómo construir una base ortonormal en H usando el conjunto D y el proceso de ortogonalización de Gram y Schmidt.

Ejemplos de sucesiones ortogonales

70 Ejercicio (ortogonalidad de los monomios trigonométricos)**.** Para cada n en $\mathbb{N}_0$ definimos φ_n mediante la regla

$$\varphi_n(x) := \mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,x}.$$

Demostrar que $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión ortonormal en $L^2([0, 2\pi), \frac{1}{2\pi}\mu)$, donde μ es la medida de Lebesgue. Tarea adicional: demostrar que $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ es una base ortonormal de este espacio.

71 Ejercicio (ortogonalidad de los polinomios de Laguerre)**.** Para cada n en $\mathbb{N}_0$ definimos L_n mediante la fórmula de Rodrigues:

$$L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(\mathrm{e}^{-x}\, x^n\right).$$

Demuestre que $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión ortogonal en $L^2((0, +\infty), \nu)$, donde $\mathrm{d}\nu(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\mu(x)$ y μ es la medida de Lebesgue. Sugerencia: usando la integración por partes demostrar que $\langle L_n, f\rangle_\nu = 0$ para cualquier polinomio f de grado $< n$. Tarea adicional: mostrar que los polinomios de Laguerre forman una base ortogonal de este espacio.

72 Ejercicio (ortogonalidad de los polinomios de Hermite)**.** Para cada n en $\mathbb{N}_0$ definimos H_n mediante la fórmula de Rodrigues:

$$H_n(x) = (-1)^n \, \mathrm{e}^{x^2} \, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(\mathrm{e}^{-x^2} \right).$$

Muestre que $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión ortogonal en el espacio $L^2(\mathbb{R}, \nu)$, donde $\mathrm{d}\nu(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}\mu(x)$ y μ es la medida de Lebesgue. Tarea adicional: demuestre que $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ es una base ortogonal de este espacio.

73 Ejercicio. Definimos los polinomios de Legendre mediante la fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(x^2 - 1 \right)^n.$$

Muestre que $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión ortogonal en el espacio $L^2([-1, 1])$. Tarea adicional: demuestre que forman una base ortogonal en este espacio.

Isomorfismos de espacios de Hilbert

74 Ejercicio. Sea $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal en H. Definimos $U \colon H \to \ell^2(\mathbb{N})$ mediante la regla

$$Uf = (\langle f, a_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}.$$

Muestre que U es un isomorfismo isométrico.