Transformada de Fourier en el eje real

Problemas para examen

En esta unidad del curso estudiamos propiedades básicas de la transformada de Fourier sobre el grupo $\mathbb{R}$.

Caracteres del grupo $\mathbb{R}$ (tema optativo)

1. Para cada ξ en $\mathbb{R}$ definimos $\varkappa_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ mediante la regla

$$\varkappa_\xi(x) := \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Demuestre que $\varkappa_\xi$ es un caracter del grupo $\mathbb{R}$.

2. Lema. Sea $w \in \mathbb{C}$ tal que para cada x en $\mathbb{R}$

$$\exp(xw) = 1.$$

Demuestre que $w = 0$.

3. Teorema (sobre la forma general de los caracteres del grupo $\mathbb{R}$). Sea γ un caracter del grupo $\mathbb{R}$. Demuestre que existe un $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma = \varkappa_\xi$.

4. Isomorfismo entre el grupo $\mathbb{R}$ y su dual. Definimos $K \colon \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$ mediante la regla

$$K(\xi) := \varkappa_\xi.$$

Demuestre que K es un isomorfismo de grupos. En realidad, K también es un homeomorfismo, pero en este curso no estudiamos la definición de la topología en el grupo dual.

La transformada de Fourier de funciones integrables

5. La transformada de Fourier de cualquier función integrable es acotada y uniformemente continua. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Definimos $\widehat{f} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

Demuestre que la función $\widehat{f}$ es acotada y uniformemente continua.

6. La transformada de Fourier y desplazamientos en el tiempo. Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$. Pongamos

$$g(x) := f(x-a) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Exprese $\widehat{g}$ en términos de $\widehat{f}$.

7. La transformada de Fourier y dilataciones positivas en el tiempo. Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a > 0$. Pongamos

$$g(x) := f\left(\frac{x}{a}\right).$$

Exprese $\widehat{g}$ en términos de $\widehat{f}$.

8. La transformada de Fourier y la reflexión en el tiempo. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pongamos

$$g(x) := f(-x).$$

Exprese $\widehat{g}$ en términos de $\widehat{f}$.

9. La transformada de Fourier de una función par. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Supongamos que f es par, esto es, $f(-x) = f(x)$ para casi todo x en $\mathbb{R}$. Demuestre que $\widehat{f}$ también es par.

10. La transformada de Fourier y la modulación en el tiempo. Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$. Pongamos

$$g(x) := \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,ax}\, f(x).$$

Exprese $\widehat{g}$ en términos de $\widehat{f}$.

11. Ejemplo: la transformada de Fourier de la función característica de un intervalo. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha < \beta$. Calcule $\widehat{f}$, donde $f = 1_{[\alpha,\beta]}$.

12. Ejemplo: la transformada de Fourier de la función exponencial en un semieje del eje real. Sea $\alpha > 0$. Calcule $\widehat{f}$, donde

$$f(x) = 1_{[0,+\infty)}(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha x} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\alpha x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

13. Ejemplo: la transformada de Fourier de la función exponencial del valor absoluto. Sea $\alpha > 0$. Calcule $\widehat{f}$, donde

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha|x|}.$$

14. Ejemplo: la transformada de Fourier de una función continua lineal a trozos. Calcule $\widehat{f}$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0,1]; \\ x - 1, & x \in [-1,0); \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]. \end{cases}$$

15. Ejemplo: la transformada de Fourier de la función gaussiana. Calcule $\widehat{f}$, donde $f(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$. Se recomienda usar herramientas de análisis complejo.

16. Ejemplo: el núcleo de calor como la transformada de Fourier de una función. Pongamos

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Demuestre que

$$H_t(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\,\mathrm{e}^{-4\pi^2 t\xi^2}\,\mathrm{d}\xi. \tag{1}$$

17. Ejemplo: la transformada de Fourier de un caso particular del núcleo de Poisson. Calcule $\widehat{f}$, donde

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Se recomienda usar residuos.

18. Ejemplo: la transformada de Fourier del núcleo de Poisson. Para cada $y > 0$ pongamos

$$P_y(x) := \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}.$$

Demuestre que $\widehat{P_y}(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi y|t|}$.

19. Lema de Riemann–Lebesgue para la transformada de Fourier sobre los números reales. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

20. Aproximación de la transformada de Fourier por la transformada finita de Fourier. Sea f una función integrable y continuamente derivable, tal que f' es acotada, y sea M un número entero positivo par. Pongamos

$$n = M^2, \qquad x_k = -\frac{M}{2} + \frac{k}{M} \quad (0 \leqslant k < n), \qquad \xi_j = -\frac{M}{2} + \frac{j}{M} \quad (0 \leqslant j < n),$$

$$(g_M)_j := \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x_k\xi_j}.$$

Demuestre que

$$|(g_M)_j - \widehat{f}(\xi_j)| \leqslant \int_{\mathbb{R}\setminus[-M/2,M/2]} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \frac{1}{M}\|f'\|_\infty.$$

Demuestre que

$$g_M = s_n \odot F_n(s_n \odot v_M),$$

donde F_n es la transformada finita de Fourier de orden n, $\odot$ es la operación de multiplicación de vectores por componentes,

$$s_n = \left[(-1)^j\right]_{j=0}^{n-1}, \qquad v_M = \left[f(x_k)\right]_{k=0}^{n-1}.$$

21. Programación: aproximación de la transformada de Fourier por la transformada finita de Fourier. En algún lenguaje de programación escriba una función que realice las fórmulas del problema anterior.

Entrada: función f, número entero positivo par M.

Salida: el vector $g_M = \left[(g_M)\right]_{j=0}^{M^2-1}$ cuyas componentes aproximan los valores de la función $\widehat{f}$ en los puntos ξ_j. Se supone que ya está dada una función `fft` que realiza la transformada rápida de Fourier (de vectores finitos).

22. Programación: prueba de la aproximación de la transformada de Fourier de la función gaussiana. En algún lenguaje de programación escriba una función que pruebe el algoritmo del Problema 21 con el ejemplo del Problema 15.

Entrada: número entero positivo M.

Salida: $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |(g_M)_j - \widehat{f}(\xi_j)|$.

23. Programación: prueba de la aproximación de la transformada de Fourier de un caso particular del núcleo de Poisson. En algún lenguaje de programación escriba una función que pruebe el algoritmo del Problema 21 con la función del Problema 17.

Entrada: número entero positivo M.

Salida: $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |(g_M)_j - \widehat{f}(\xi_j)|$.

La transformada de Fourier y la derivada

24. La transformada de Fourier de la derivada. Enuncie y demuestre la fórmula para la tranformada de Fourier de la función f', suponiendo que $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $f' \in L^1(\mathbb{R})$.

25. La derivada de la transformada de Fourier. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Enuncie una condición suficiente para que la función $\widehat{f}$ sea derivable, exprese su derivada en términos de la función $\widehat{f}$, y demuestre este resultado.

Convolución en $L^1(\mathbb{R})$

26. Definición de la convolución de dos funciones integrables. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Demuestre que para casi todo x en $\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}y < +\infty$$

y que la función $f * g$ definida mediante la regla

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y,$$

es de clase $L^1(\mathbb{R})$.

27. Propiedades aritméticas de la convolución de funciones integrables. Sean $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$f * g = g * f, \qquad (f * g) * h = f * (g * h),$$
$$(f + g) * h = f * h + g * h, \qquad (\alpha f) * g = \alpha(f * g).$$

Como consecuencia, $L^1(\mathbb{R})$ con las operaciones vectoriales comunes y con la operación $*$, es una álgebra compleja asociativa y conmutativa.

28. Teorema de convolución. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Demuestre que $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

29. Fórmula de reciprocidad para la convolución. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ y sea

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi.$$

Demuestre que para cada x en $\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)G(y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) g(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi.$$

30. Fórmula para la convolución con el núcleo de calor. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$(H_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-4\pi^2\xi^2 t}\, \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi.$$

Núcleos aproximativos en el eje real

31. Definición de núcleos aproximativos. Sea $(K_t)_{t>0}$ una familia de funciones de clase $L^1(\mathbb{R})$. ¿Cuándo se dice que $(K_t)_{t>0}$ es un núcleo aproximativo? ¿Cuándo se dice que $(K_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac?

32. Una receta para construir familias de Dirac. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $f \geqslant 0$ y $\|f\|_1 = 1$. Pongamos

$$K_t(x) := \frac{1}{t} f\left(\frac{x}{t}\right).$$

Demuestre que $(K_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

33. El núcleo de calor es una familia de Dirac. Demuestre que la familia $(H_t)_{t>0}$ del Problema 16 es una familia de Dirac.

34. Aproximación uniforme de funciones acotadas uniformemente continuas por medio de núcleos aproximativos. Sea $f \in C_{bu}(\mathbb{R})$ y sea $(K_t)_{t>0}$ un núcleo aproximativo. Demuestre que

$$\lim_{t\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}} |(K_t * f)(x) - f(x)| = 0.$$

35. Aproximación de funciones integrables por medio de núcleos aproximativos. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$\lim_{t\to 0} \|K_t * f - f\|_1 = 0.$$

La transformada de Fourier en la clase de Schwartz

36. Definiciones equivalentes de la clase de Schwartz. Escriba varias definiciones equivalentes de la clase de Schwartz $S(\mathbb{R})$ y demuestre su equivalencia.

37. La función gaussiana pertenece a la clase de Schwartz. Muestre que la función f del Problema 15 pertenece a $S(\mathbb{R})$.

38. Las funciones de la clase de Schwartz son integrables. Sea $f \in S(\mathbb{R})$. Demuestre que $f \in L^1(\mathbb{R})$.

39. Transformada de Fourier de una función de la clase de Schwartz. Sea $f \in S(\mathbb{R})$. Demuestre que $\widehat{f} \in S(\mathbb{R})$.

40. Fórmula de inversión de Fourier para funciones de la clase de Schwartz. Sea $f \in S(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\, \mathrm{d}\xi.$$

Solución de la ecuación de calor en la recta real

41. Deducción de la solución de la ecuación de calor. Sea $f \in S(\mathbb{R})$. Supongamos que $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ y que u es una solución de la ecuación de calor

$$(D_2 u)(x,t) = (D_1^2 u)(x,t) \qquad (x \in \mathbb{R},\ t > 0).$$

Muestre (sin justificaciones formales) que

$$u(x,t) = (H_t * f)(x).$$

42. Aproximación de la solución de la ecuación de calor. Sean $f \in S(\mathbb{R})$, $M > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$. Pongamos

$$x_j := -\frac{M}{2} + \frac{Mj}{n} \quad (j \in \{0, \ldots, n-1\}), \qquad y_k := -\frac{M}{2} + \frac{Mk}{n} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}).$$

Muestre que $(H_t * f)_j \approx v_j$, donde

$$v_j := \frac{M}{n} \sum_{k=0}^{n-1} H_t(x_j - y_k) f(y_k). \tag{2}$$

43. Programación: aproximación de la solución de la ecuación de calor. En algún lenguaje de programación escriba una función que realice la fórmula del Problema 42.

Entrada: función f, números enteros positivos M y n, número positivo t.

Salida: el vector v definido mediante la fórmula (2).