Álgebras C*

problemas para examen

La lista todavía no es completa.

Índice

1. Definición de álgebra C* y ejemplos

1 Ejercicio (definición de involución)**.** ¿Qué es una involución en un álgebra compleja? Escriba la definición.

2 Ejercicio (definición de álgebra C*)**.** Escriba la definición de álgebra C*.

3 Ejercicio (los operadores lineales acotados en un espacio de Hilbert forman un álgebra C*)**.** Sea H un espacio de Hilbert. Demuestre que $\mathcal{B}(H)$ es un álgebra C* con identidad. Demuestre que si H tiene al menos dos vectores linealmente independientes, entonces el álgebra $\mathcal{B}(H)$ es no conmutativa.

4 Ejercicio (correspondencia entre matrices y operadores)**.** Definimos $\Phi\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ mediante la regla

$$\Phi(A)(v) := Av.$$

Demuestre que Φ es un isomorfismo de álgebras complejas, es decir, la función Φ es biyectiva, lineal y multiplicativa.

5 Ejercicio (la matriz transpuesta conjugada corresponde al operador adjunto)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Denotemos por A a la matriz transpuesta conjugada de A:

$$A^* := \left[\overline{A_{k,j}}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Demuestre que para cada u, v en $\mathbb{C}^n$ se cumple

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle.$$

En la notación del Ejercicio 4, esto significa que $\Phi(A^*) = \Phi(A)^*$.

6 Ejercicio (las matrices cuadradas complejas forman un álgebra C*)**.** Dotamos $\mathbb{C}^n$ de la norma euclideana, identificamos $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ usando el isomorfismo Φ del Ejercicio 4, y dotamos $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norma de operadores:

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

En otras palabras, pongamos $\|A\| := \|\Phi(A)\|$. Demuestre que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es un álgebra C*. Demuestre que para $n \geq 2$ esta álgebra no es conmutativa.

7 Ejercicio (las funciones acotadas con la norma-supremo forman un álgebra C* conmutativa con identidad)**.** Sea X un conjunto. Denotamos por $B(X)$ al conjunto de todas las funciones acotadas $X \to \mathbb{C}$, dotado de las operaciones por puntos, de la conjugación por puntos como involución, y de la norma-supremo. Muestre que $B(X)$ es un álgebra C* conmutativa con identidad.

8 Ejercicio (las funciones continuas definidas en un espacio compacto de Hausdorff forman un álgebra C* conmutativa con identidad)**.** Sea K un compacto de Hausdorff. Demuestre que $C(K)$ es un álgebra C* conmutativa con identidad.

9 Ejercicio (los vectores complejos con multiplicación por entradas forman un álgebra C* con identidad)**.** Muestre que $\mathbb{C}^n$ se puede tratar como un caso especial de 8 y por eso $\mathbb{C}^n$ es un álgebra C* conmutativa con identidad.

10 Ejercicio (las funciones esencialmente acotadas forman un álgebra C* conmutativa con identidad)**.** Sea (X, μ) un espacio de medida. Recuerde la definición de la norma $\|\cdot\|_\infty$ y demuestre que $L^\infty(X, \mu)$ es un álgebra C* conmutativa con identidad.

11 Ejercicio (C*-subálgebra de un C*-álgebra)**.** Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* y sea $\mathcal{B}$ una subálgebra de $\mathcal{A}$ cerrada bajo las operaciones algebraicas, cerrada bajo la involución y cerrada en la topología de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{B}$, considerada con las operaciones restringidas y con la norma restringida, es un álgebra C*. En esta situación se dice que $\mathcal{B}$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$.

12 Ejercicio (la intersección de una colección de C*-subálgebras es C*-subálgebra)**.** Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* y sea $\mathcal{C}$ una colección de sus C*-subálgebras. Pongamos $\mathcal{B} := \cap\mathcal{C}$. Muestre que $\mathcal{B}$ es una C*-subálgebra de $\mathcal{A}$.

13 Ejercicio. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* y sea $M \subseteq \mathcal{A}$. ¿Cómo se define la subálgebra C* de $\mathcal{A}$ *generada* por M?

2. Propiedades elementales de involuciones

14 Ejercicio (involución y la identidad)**.** Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja con involución y con identidad e. Demuestre que $e^* = e$.

15 Ejercicio (involución y elementos invertibles)**.** Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja con identidad y con involución, y sea $a \in \mathcal{A}$. Demuestre que a es invertible si, y solo si, a^* es invertible. Demuestre que si a es invertible, entonces

$$(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*.$$

16 Ejercicio. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* con identidad y sea $a \in \mathcal{A}$. Demuestre que

$$\operatorname{Sp}(a^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon\ \overline{\lambda} \in \operatorname{Sp}(a)\}.$$

17 Ejercicio. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C*. Demuestre que la involución de $\mathcal{A}$ es isométrica.

3. Elementos normales en álgebras C*

En esta sección suponemos que $\mathcal{A}$ es un álgebra C* con identidad.

18 Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{A}$. ¿Cuándo se dice que a es normal? ¿autoadjunto? ¿unitario? ¿positivo? ¿proyección?

19 Ejercicio (el radio espectral de dos elementos que conmutan)**.** Sean $a, b \in \mathcal{A}$ tales que $ab = ba$. Demuestre que

$$r(ab) = r(a)r(b).$$

20 Ejercicio (el radio espectral de dos elementos que no conmutan)**.** Muestre que la condición “$ab = ba$” del ejercicio anterior es esencial. En el álgebra de matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ encuentre dos matrices A, B tales que

$$r(AB) \neq r(A)r(B).$$

21 Ejercicio (el radio espectral de un elemento autoadjunto)**.** Sea $a \in \mathcal{A}$ tal que $a^* = a$. Demuestre que

$$r(a) = \|a\|.$$

22 Ejercicio (el radio espectral de un elemento normal)**.** Sea $a \in \mathcal{A}$ tal que $a^*a = aa^*$. Demuestre que

$$r(a) = \|a\|.$$

23 Ejercicio (la norma en un álgebra C* se determina por propiedades algebraicas)**.** Sea $a \in \mathcal{A}$. Demuestre que

$$\|a\| = \sqrt{r(a^*a)}.$$

Notemos que el lado derecho de esta fórmula involucra solamente la estructura algebraica de $\mathcal{A}$.

24 Ejercicio (unicidad de la norma en un álgebra C*)**.** Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* con identidad y sea $\|\cdot\|_1$ una norma en $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}$ con la norma $\|\cdot\|_1$ también es álgebra C*. Demuestre que $\|a\|_1 = \|a\|$ para cada a en $\mathcal{A}$.

25 Ejercicio (el espectro de elementos unitarios)**.** Sea $a \in \mathcal{A}$, a unitario. Demuestre que

$$\mathrm{Sp}(a) \subseteq \mathbb{T}.$$

26 Ejercicio (el espectro de elementos autoadjuntos)**.** Sea $a \in \mathcal{A}$, $a^* = a$. Demuestre que

$$\mathrm{Sp}(a) \subseteq \mathbb{R}.$$

27 Ejercicio (la parte real e imaginaria de un elemento de un álgebra C*)**.** Sea $a \in \mathcal{A}$. Demuestre que existe un único par ordenado (b, c) de elementos autoadjuntos de $\mathcal{A}$ tal que $a = b + \mathrm{i}\, c$.

28 Ejercicio (criterio de elementos normales en términos de su parte real e imaginaria)**.** Sean a, b, c como en el ejercicio anterior. Demuestre que a es normal si, y solo si, b y c conmutan.

29 Ejercicio (criterio de isometrías lineales en un espacio de Hilbert)**.** Sea H un espacio de Hilbert y sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) A es una isometría, esto es, $d(Au, Av) = d(u, v)$ para cada u, v en H;

(b) A preserva la norma, esto es, $\|Au\| = \|u\|$ para cada u en H;

(c) A preserva el producto interno, esto es, $\langle Au, v\rangle = \langle u, v\rangle$ para cada u, v en H;

(d) $A^*A = I$.

30 Ejercicio (un operador es unitario si, y solo si, es una isometría lineal suprayectiva)**.** Sea H un espacio de Hilbert y sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Demuestre que A es unitario si, y solo si, A es una isometría lineal y $A[H] = H$.

4. Álgebras C* conmutativas

31 Ejercicio (álgebra de funciones continuas sobre un compacto, repaso)**.** Sea K un compacto de Hausdorff y sea $f \in C(K)$. Demuestre que

$$\mathrm{Sp}(f) = f[K], \qquad r(f) = \|f\| = \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

32 Ejercicio (descripción de varias subclases de elementos normales en el álgebra de funciones continuas sobre un compacto)**.** Sea K un compacto de Hausdorff y sea $f \in C(K)$. Demuestre las siguientes afirmaciones.

1. f es autoadjunto $\iff f[X] \subseteq \mathbb{R}$.

2. f es unitario $\iff f[X] \subseteq \mathbb{T}$.

3. f es positivo $\iff f[X] \subseteq [0, +\infty)$.

4. f es proyección $\iff f[X] \subseteq \{0, 1\}$.

33 Ejercicio (propiedad de separación de los puntos en el álgebra de funciones continuas sobre un compacto)**.** Sea K un compacto de Hausdorff. Demuestre que el álgebra $C(K)$ separa los puntos de K, esto es, para cada par de puntos x, y en K con $x \neq y$ existe f en $C(K)$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

34 Ejercicio (teorema de Stone–Weierstrass)**.** Sea K un compacto de Hausdorff. Recuerde el enunciado del teorema de Stone–Weierstrass para el álgebra $C(K)$.

35 Ejercicio (aplicación del teorema de Stone–Weierstrass a polinomios)**.** Demuestre que el conjunto de las funciones polinomiales es denso en $C([0,1])$.

36 Ejercicio (aplicación del teorema de Stone–Weierstrass a polinomios trigonométricos)**.** Una función $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ se llama *función polinomial de Laurent* (o *polinomio trigonométrico*) si existen m, n en $\mathbb{N}$ y $a_{-m}, \ldots, a_n$ en $\mathbb{C}$ tales que

$$f(t) = \sum_{k=-m}^{n} a_k t^k.$$

Demuestre que el conjunto de las funciones polinomiales de Laurent es denso en $C(\mathbb{T})$.

37 Ejercicio (los C*-homomorfismos no aumentan la norma)**.** Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ álgebras C* y sea $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un C*-homomorfismo. Demuestre que para cada a en $\mathcal{A}$

$$\|\Phi(a)\| \le \|a\|.$$

38 Ejercicio (los C*-isomorfismos son isométricos)**.** Sea $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un C*-isomorfismo. Demuestre que Φ es isométrico.

39 Ejercicio (en el caso de un álgebra C* conmutativa, la transformada de Gelfand es un C*-isomorfismo)**.** Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* conmutativa. Denotemos por Γ a la transformada de Gelfand correspondiente. Demuestre que Γ es in C*-isomorfismo, así que $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfa a $C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$.