Medidas positivas de Borel

Problemas para el examen

Preliminares topológicos (repaso)

1. Criterio de la función continua. Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos y sea $f\colon X \to Y$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es continua, esto es, $\forall W \in \tau_Y \quad f^{-1}[W] \in \tau_X$;

(b) f es continua en todo punto del espacio X, esto es,

$$\forall x \in X \quad \forall W \in \mathcal{V}_{f(x)} \quad \exists U \in \mathcal{V}_x \quad f[U] \subseteq W.$$

Funciones semicontinuas

2. Demuestre que la función característica de un conjunto abierto es semicontinua por abajo.

3. Demuestre que la función característica de un conjunto cerrado es semicontinua por arriba.

4. Supremo de una familia de funciones semicontinuas por abajo. Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$, donde $f_\alpha\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, una familia de funciones semicontinuas por abajo. Entonces la función $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, definida mediante la siguiente regla, también es semicontinua por abajo:

$$\forall x \in X \qquad g(x) := \sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x).$$

5. Ínfimo de una familia de funciones semicontinuas por arriba. Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$, donde $f_\alpha\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, una familia de funciones semicontinuas por arriba. Entonces la función $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ definida mediante la siguiente regla, también es semicontinua por arriba:

$$\forall x \in X \qquad g(x) := \inf_{\alpha \in A} f_\alpha(x).$$

6. Suma de dos funciones semicontinuas. Sean $f_1, f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ funciones semicontinuas por abajo. Demuestre que su suma $f_1 + f_2$ también es semicontinua por abajo.

7. Suma de una serie de funciones semicontinuas. Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones, $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, y sea $g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Determine cuál de las siguientes afirmaciones es válida y demuéstrela. Con un ejemplo muestre que la otra afirmación es falsa.

- Si las funciones f_n todas son semicontinuas por abajo, entonces g también lo es.
- Si las funciones f_n todas son semicontinuas por arriba, entonces g también lo es.

Espacios localmente compactos

8. Imagen de un compacto bajo una función continua. Sean X, Y espacios topológicos, sea $f \in C(X, Y)$ y sea $K \subseteq X$ un conjunto compacto en X. Demuestre que $f[K]$ es compacto en Y.

9. Separación de un conjunto compacto y un conjunto cerrado. Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto, sea $K \subseteq X$ un conjunto compacto y sea $F \subseteq X$ un conjunto cerrado tales que $K \cap F = \varnothing$. Demuestre que existe un conjunto abierto V tal que $\overline{V}$ es compacto, $K \subseteq V$ y $\overline{V} \cap F = \varnothing$.

Lema de Urysohn y partición de la unidad

10. Distancia de un punto variable a un conjunto fijo es una función continua. Sea X un espacio métrico, sea $S \subseteq X$ un conjunto fijo no vacío. Definamos la función $f\colon X \to [0, +\infty)$ mediante la regla:

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, S) \coloneqq \inf_{y \in S} d(x, y).$$

Demuestre que f satisface la condición de Lipschitz con coeficiente 1:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le d(x_1, x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Concluya de aquí que f es continua.

11. Demostración del lema de Urysohn en el caso de un espacio métrico localmente compacto. Demuestre el lema de Urysohn en el caso de un espacio métrico. Use la métrica para construir la función cuya existencia está afirmada en el lema.

12. Teorema de la partición de la unidad. Enuncie y demuestre el teorema de la partición de la unidad en espacios localmente compactos.

13. Ejemplo para el teorema de la partición de la unidad. Enuncie el teorema de la partición de la unidad. Construya funciones f_1, f_2, f_3 como en este teorema para el compacto $K = [1, 2] \cup [5, 8]$ y los abiertos

$$U_1 = (0, 2) \cup (6, 9), \qquad U_2 = (1, 3) \cup (4, 6), \qquad U_3 = (5, 7).$$

Es suficiente dibujar bien las gráficas de f_1, f_2, f_3.

Teorema de la representación de Riesz

14. Escriba el enunciado del teorema de la representación de Riesz.

15. Demuestre la unicidad de la medida μ en el teorema de representación de Riesz.

16. Escriba las siguientes partes de la demostración del teorema de representación de Riesz:

1. Definición de la función $\mu'\colon \tau \to \overline{\mathbb{R}}_+$.
2. Demostración de que μ' es creciente.
3. Definición de la función $\mu\colon 2^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$.
4. Demostración de que $\mu(A)$ coincide con $\mu'(A)$ para todo $A \in \tau$.

Teorema de Lusin

17. Lema. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0,1])$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definamos $g_n\colon X \to [0,1]$ de la siguiente manera:

$$g_n(x) = \frac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n}.$$

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ la función $2^{n+1}(g_{n+1} - g_n)$ es la función característica de un conjunto $Y_n \in \mathcal{F}$. Halle Y_n.

18. Teorema de Lusin. Enuncie el teorema de Lusin. Escriba la demostración para el caso si la función es acotada y se anula fuera de un conjunto compacto.