

Espacios de Banach

Problemas para examen

Índice

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 1 | Definición de espacios normados y de Banach | 2 |
| 2 | Bolas en espacios normados | 3 |
| 3 | Propiedades especiales de la topología en el espacio normado | 6 |
| 4 | Comparación de normas o seminormas | 8 |
| 5 | Normas en \mathbb{C}^n | 9 |
| 6 | Teorema de Riesz sobre las esferas y bolas en un espacio normado de dimensión infinita | 10 |
| 7 | Espacios de sucesiones | 10 |
| 8 | Algunos espacios de funciones acotadas | 14 |
| 9 | Sumas de espacios normados | 15 |
| 10 | Espacios cocientes | 16 |
| 11 | Espacios de funciones medibles e integrables | 17 |
| 12 | Bases de Schauder | 19 |
| 13 | Algunos espacios separables y no separables | 20 |

En todos estos problemas suponemos que los espacios vectoriales son complejos. Sin embargo, la mayor parte de esta teoría es válida también para espacios reales.

1. Definición de espacios normados y de Banach

1 Ejercicio (definición del espacio normado). Sea V un espacio vectorial complejo. Escribir la definición de una *seminorma* en V . Escribir la definición de una *seminorma extendida* en V (se admite el valor $+\infty$). Escribir la definición de una *norma* en V .

2 Ejercicio. Sea V un espacio vectorial complejo y sea $N: V \rightarrow [0, +\infty]$ una seminorma extendida, es decir, una función subaditiva y homogénea absoluta:

$$N(a + b) \leq N(a) + N(b), \quad N(\lambda a) = |\lambda|N(a).$$

Pongamos $W := \{a \in V: N(a) < +\infty\}$. Mostrar que W es un subespacio vectorial de V .

3 Ejercicio (la desigualdad inversa del triángulo para las seminormas). Sea (V, N) un espacio seminormado. Demostrar que para cualesquiera u, v en V ,

$$|N(u) - N(v)| \leq N(u - v).$$

4 Ejercicio. Sea (V, N) un espacio seminormado. Demostrar que

$$N(0_V) = 0.$$

5 Ejercicio. Sea (V, N) un espacio seminormado. Demostrar que

$$\forall a \in V \quad N(-a) = N(a).$$

6 Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo. ¿Cómo se define la distancia d inducida por la norma $\|\cdot\|$? Demostrar que d realmente es una distancia.

7 Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea d la distancia inducida por la norma. ¿Cómo expresar la norma en términos de d ?

8 Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea d la distancia inducida por la norma. Demostrar que

$$\forall a, b, c \in V \quad d(a + c, b + c) = d(a, b) \quad (1)$$

$$\forall a, b \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad d(\lambda a, \lambda b) = |\lambda| d(a, b). \quad (2)$$

9 Ejercicio. Sea V un espacio vectorial complejo y sea d una distancia que satisface las propiedades (1) y (2). Demostrar que en V existe una única norma que induce d .

10 Ejercicio. Definimos $d: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ mediante la regla

$$d(a, b) := |\arctan(a) - \arctan(b)|.$$

Demostrar que d es una distancia. Demostrar que en \mathbb{R} no existe ninguna norma N tal que d sea inducida por N .

11 Ejercicio. ¿Qué es un *espacio de Banach*? Recordar la definición.

12 Ejercicio (criterio de completitud de espacios normados en términos de la convergencia de series). Sea V un espacio normado. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) V es completo;
- (b) para cada sucesión $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en V , si $\sum_{k \in \mathbb{N}} \|a_k\| < +\infty$, entonces la serie $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ converge en V , esto es, existe un vector b en V tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| b - \sum_{k=1}^n a_k \right\| = 0.$$

La implicación (a) \Rightarrow (b) se conoce como “ M -prueba de Weierstrass” (Weierstrass M -test).

13 Ejercicio (completación de un espacio normado, mini-tarea adicional). Sea V un espacio normado. Explicar cómo construir un espacio de Banach W y una transformación lineal isométrica $f: V \rightarrow W$ tal que $f[V]$ sea denso en W .

2. Bolas en espacios normados

Sea V un espacio vectorial complejo normado. Las bolas en V se definen de la misma manera que en espacios métricos:

$$B(a, r) := \{x \in V: d(x, a) < r\}, \quad C(a, r) := \{x \in V: d(x, a) \leq r\}.$$

En vez de $C(a, r)$, se usa también la notación $\overline{B}(a, r)$.

14 Ejercicio. Recordar la definición de conjuntos convexos en espacios vectoriales reales o complejos.

15 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Demostrar que la bola $B(a, r)$ es convexa.

16 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Demostrar que

$$B(a, r) = a + rB(0, 1).$$

17 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$\lambda B(a, r) = B(\lambda a, |\lambda|r).$$

18 Ejercicio. Sean $r_1, r_2 > 0$. Demostrar que

$$B(0, r_1) + B(0, r_2) = B(0, r_1 + r_2).$$

19 Ejercicio. Sean $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$. Demostrar que

$$B(a_1, r_1) + B(a_2, r_2) = B(a_1 + a_2, r_1 + r_2).$$

20 Ejercicio (algunas propiedades de bolas en espacios métricos, repaso). Sea (X, d) un espacio métrico o pseudométrico. Demostrar las siguientes propiedades de bolas.

- Si $a \in X$ y $r_1 \leq r_2$, entonces $B(a, r_1) \subseteq B(a, r_2)$.
- Si $a_1, a_2 \in X$ y $d(a_1, a_2) + r_1 \leq r_2$, entonces $B(a_1, r_1) \subseteq B(a_2, r_2)$.
- Si $a_1, a_2 \in X$ y $d(a_1, a_2) \geq r_1 + r_2$, entonces $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset$.
- $\text{cl}(B(a, r)) \subseteq C(a, r)$, donde $C(a, r) := \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$.
- $B(a, r) \subseteq \text{int}(C(a, r))$.
- $\text{diam}(B(a, r)) \leq 2r$.

21 Ejercicio. Recordar la definición de la topología inducida por una métrica o pseudométrica. Repetir esta definición en el caso particular cuando la pseudométrica está inducida por una seminorma.

22 Ejercicio. Supongamos que (V, N) es un espacio seminormado complejo. Demostrar que V es de Hausdorff si, y solo si, N es una norma.

23 Ejercicio (propiedades “malas” de bolas en espacios métricos, repaso). Mostrar con ejemplos que las propiedades anteriores, en general, no se pueden “invertir”.

- Encontrar un espacio métrico X , un punto a en X y dos números $r_1, r_2 > 0$, tales que $r_1 > r_2$, pero $B(a, r_1) \subseteq B(a, r_2)$.
- Encontrar un espacio métrico X , dos puntos a_1, a_2 en X y dos números $r_1, r_2 > 0$, tales que $d(a_1, a_2) + r_1 > r_2$, pero $B(a_1, r_1) \subseteq B(a_2, r_2)$.
- Encontrar un espacio métrico X , dos puntos a_1, a_2 en X y dos números $r_1, r_2 > 0$, tales que $d(a_1, a_2) < r_1 + r_2$, pero $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset$.
- Encontrar un espacio métrico X , un punto a en X y un número $r > 0$, tales que $\text{cl}(B(a, r)) \neq C(a, r)$.
- Encontrar un espacio métrico X , un punto a en X y un número $r > 0$, tales que $\text{int}(C(a, r)) \neq B(a, r)$.
- Encontrar un espacio métrico X , un punto a en X y un número $r > 0$, tales que $\text{diam}(B(a, r)) < 2r$.

Mostremos que en los espacios normados las bolas son “más rígidas” que en espacios métricos generales. Para demostrar que ciertos conjuntos son no vacíos, se recomienda construir explícitamente elementos de estos conjuntos, usando los datos iniciales del ejercicio.

24 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $u \in V \setminus \{0_V\}$. Mostrar que para cada s en $[0, r)$,

$$a + \frac{s}{\|u\|} u \in B(a, r).$$

25 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $x \in B(a, r)$ tales que $x \neq a$. Mostrar que existen u en $V \setminus \{0_V\}$ y s en $[0, r)$ tales que

$$x = a + \frac{s}{\|u\|} u.$$

26 Ejercicio. Supongamos que $V \neq \{0_V\}$. Sean $a \in V$, $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 > r_2$. Demostrar que $B(a, r_1) \setminus B(a, r_2) \neq \emptyset$.

27 Ejercicio. Supongamos que $V \neq \{0_V\}$. Sean $a_1, a_2 \in V$ y $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$r_1 + \|a_1 - a_2\| > r_2.$$

Demostrar que $B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.

28 Ejercicio. Sean $a_1, a_2 \in V$ y $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$\|a_1 - a_2\| < r_1 + r_2.$$

Mostrar que $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.

29 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $x \in V$ tal que $\|x - a\| = r$. Construir una sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n \in B(a, r)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x.$$

30 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Mostrar que $\text{cl}(B(a, r)) = C(a, r)$.

31 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Mostrar que $\text{int}(C(a, r)) = B(a, r)$.

32 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Mostrar que la esfera $S(a, r) := \{x \in X : d(x, a) = r\}$ es la frontera de $B(a, r)$. Mostrar que $S(a, r)$ es la frontera de $C(a, r)$.

33 Ejercicio. Sea V un espacio normado tal que $V \neq \{0_V\}$, y sean $a \in V$, $r > 0$. Demostrar que la bola abierta $B(a, r)$ no es un conjunto cerrado. Demostrar que la bola cerrada $C(a, r)$ no es un conjunto abierto.

34 Ejercicio. Sea V un espacio normado tal que $V \neq \{0_V\}$, y sean $a \in V$, $r > 0$. Demostrar que $\text{diam}(B(a, r)) = 2r$.

3. Propiedades especiales de la topología en el espacio normado

Sea V un espacio normado complejo.

35 Ejercicio. Demostrar que la operación de adición $V \times V \rightarrow V$ es continua.

36 Ejercicio. Demostrar que la operación de multiplicación de escalares por vectores $\mathbb{C} \times V \rightarrow V$ es continua.

37 Ejercicio. Sea $a \in V$. Demostrar que la función $f: V \rightarrow V$, $f(x) := a + x$, es un homeomorfismo.

38 Ejercicio. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que la función $g: V \rightarrow V$, $g(x) := \lambda x$, es un homeomorfismo.

39 Ejercicio. Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que la función $h: V \rightarrow V$, $h(x) := a + \lambda x$, es un homeomorfismo.

40 Ejercicio. Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $X \subseteq V$.

- Demostrar que si X es abierto, entonces $a + \lambda X$ es abierto.
- Demostrar que si X es cerrado, entonces $a + \lambda X$ es cerrado.

41 Ejercicio. Sea W un subespacio de V . Demostrar que $\text{cl}(W)$ es un subespacio de V .

42 Ejercicio. Sea W un subespacio de V tal que $\text{int}(W) \neq \emptyset$. Demostrar que $W = V$. (Consecuencia: si $W \neq V$, entonces $\text{int}(W) = \emptyset$.)

43 Ejercicio. Sea W un subespacio de V tal que $W \neq V$. Demostrar que la frontera de W es un subespacio de V .

44 Ejercicio. Sea $X \subseteq V$ y sea Y un subconjunto abierto de V . Demostrar que el conjunto $X + Y$ es abierto.

45 Problema (micro-tarea adicional). Sea V un espacio normado y sea X un subconjunto abierto de V . Demostrar que X es conexo si, y solo si, X es arco-conexo.

4. Comparación de normas o seminormas

Sea V un espacio vectorial complejo.

46 Ejercicio. Sean N_1 y N_2 dos seminormas en V . Escribimos $N_1 \leq N_2$, si para cada v en V se cumple $N_1(v) \leq N_2(v)$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) $N_1 \leq N_2$.
- (b) $B_{N_2}(0_V, 1) \subseteq B_{N_1}(0_V, 1)$, esto es, para cada v con $N_2(v) < 1$, se cumple $N_1(v) < 1$.
- (c) $C_{N_2}(0_V, 1) \subseteq C_{N_1}(0_V, 1)$, esto es, para cada v con $N_2(v) \leq 1$, se cumple $N_1(v) \leq 1$.
- (d) $B_{N_2}(0_V, 1) \subseteq C_{N_1}(0_V, 1)$, esto es, para cada v con $N_2(v) < 1$, se cumple $N_1(v) \leq 1$.

47 Ejercicio. Sean N_1 y N_2 dos seminormas en un espacio vectorial V . Decimos que N_1 está *dominada* por N_2 y escribimos $N_1 \preceq N_2$, si existe un número $C \geq 0$ tal que $N_1(v) \leq CN_2(v)$ para cada v en V . Demostrar que la relación \preceq es transitiva y reflexiva.

48 Ejercicio. Sean N_1 y N_2 dos seminormas en un espacio vectorial V . Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $N_1 \preceq N_2$;
- (b) existe $\delta > 0$ tal que $B_2(0, \delta) \subseteq B_1(0, 1)$;
- (c) para cada $r_1 > 0$ existe $r_2 > 0$ tal que $B_2(0, r_2) \subseteq B_1(0, r_1)$;
- (d) $\tau_1 \subseteq \tau_2$, donde τ_1 y τ_2 son las topologías inducidas por las seminormas N_1 y N_2 , respectivamente.

49 Ejercicio. Sean N_1 y N_2 dos seminormas en un espacio vectorial V . Escribimos $N_1 \cong N_2$ si $N_1 \preceq N_2$ y $N_2 \preceq N_1$. Demostrar que \cong es una relación de equivalencia. Cuando $N_1 \cong N_2$, se dice simplemente que las seminormas N_1 y N_2 son equivalentes. Usando el resultado del Ejercicio 48, mostrar que dos seminormas son equivalentes si, y solo si, estas seminormas inducen la misma topología.

5. Normas en \mathbb{C}^n

Suponemos que $n \in \mathbb{N}$.

50 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Escribir la fórmula para la norma $\|\cdot\|_p$ en \mathbb{C}^n . Justificar que $\|\cdot\|_p$ es una norma.

51 Ejercicio. Escribir la fórmula para la norma $\|\cdot\|_\infty$ en \mathbb{C}^n . Justificar que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma. Demostrar que para cada a en \mathbb{C}^n

$$\|a\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|a\|_p.$$

52 Ejercicio. Mostrar de manera directa que las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ en \mathbb{C}^n son equivalentes.

53 Ejercicio. Sean $p \in [1, +\infty]$, $a \in \mathbb{C}^n$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Mostrar que

$$|a_k| \leq \|a\|_p. \quad (3)$$

54 Ejercicio. Sean $p \in [1, +\infty]$, $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathbb{C}^n , $b \in \mathbb{C}^n$. Mostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $\|a_m - b\|_p \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$;
- (b) para cada k en $\{1, \dots, n\}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,k} = b_k$.

55 Ejercicio. Sean $p \in [1, +\infty]$, $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathbb{C}^n . Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{C}^n ;
- (b) para cada k en $\{1, \dots, n\}$, $(a_{m,k})_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{C} .

56 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty]$. Mostrar que el espacio \mathbb{C}^n con la norma $\|\cdot\|_p$ es completo.

57 Ejercicio. Sea $N: \mathbb{C}^n \rightarrow [0, +\infty)$ una norma. Dotamos \mathbb{C}^n de la topología inducida por $\|\cdot\|_2$. Demostrar que la función N es continua.

58 Ejercicio. Sea $N: \mathbb{C}^n \rightarrow [0, +\infty)$ una norma. Mostrar que $N \cong \|\cdot\|_2$.

59 Ejercicio. Mostrar que cualesquiera dos normas en \mathbb{C}^n son equivalentes.

60 Ejercicio. Sea N una norma en \mathbb{C}^n . Mostrar que el espacio (\mathbb{C}^n, N) es completo.

61 Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita. Demostrar que V es completo.

62 Ejercicio. Sea V un espacio normado completo de dimensión finita.

- Demostrar que si X es un subconjunto acotado en V , entonces X es totalmente acotado.
- Demostrar que si Y es un subconjunto acotado y cerrado en V , entonces Y es compacto.

63 Ejercicio. Sea V un espacio normado y sea W un subespacio de V de dimensión finita. Demostrar que W es cerrado en V .

6. Teorema de Riesz sobre las esferas y bolas en un espacio normado de dimensión infinita

64 Ejercicio (lema de Riesz). Sean V un espacio normado, W un subespacio cerrado de V tal que $W \neq V$, y $r \in (0, 1)$. Demostrar que existe v en V tal que $\|v\| = 1$ y $d(v, W) \geq r$.

65 Ejercicio (teorema de Riesz). Sea V un espacio normado de dimensión infinita. Demostrar que la esfera unitaria $S := \{v \in V: \|v\| = 1\}$ no es totalmente acotada en V . Demostrar que la bola cerrada $C := \{v \in V: \|v\| \leq 1\}$ y la bola abierta $B(0_V, 1)$ tampoco son totalmente acotadas. Demostrar que S y C no son conjuntos compactos.

7. Espacios de sucesiones

66 Ejercicio (desigualdad de Young, el caso de igualdad). Sean $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Usando la convexidad estricta de la función exponencial real demostrar la

igualdad de Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

67 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad de Young). Sean $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Demostrar que

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \iff a^p = b^q.$$

68 Ejercicio (la desigualdad de Hölder para sucesiones). Sean $p, q \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x, y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Recordar una demostración de la desigualdad de Hölder

$$N_1(xy) \leq N_p(x)N_q(y).$$

69 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad de Hölder). Sean $p, q \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x, y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Determinar cuándo se cumple la igualdad

$$N_1(xy) = N_p(x)N_q(y).$$

70 Ejercicio (desigualdad de Minkowski para sucesiones). Recordar una demostración de la propiedad subaditiva de N_p .

71 Ejercicio. Recordar la definición del espacio $\ell^p(\mathbb{N})$ para $p \in [1, +\infty)$ y para $p = +\infty$.

72 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad de Minkowski para sucesiones). Sean $p \in (1, +\infty)$, $x, y \in \ell^p(\mathbb{N})$. Determinar cuándo se cumple la igualdad

$$\|x + y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

73 Ejercicio. Sea $p \in (1, +\infty)$. Demostrar que la bola unitaria cerrada en el espacio $\ell^p(\mathbb{N})$ es estrictamente convexa, esto es, para cualesquiera x, y en $\ell^p(\mathbb{N})$ con $x \neq y$, $\|x\|_p = 1$, $\|y\|_p = 1$, y cualquier λ en $(0, 1)$,

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y\|_p < 1.$$

Se recomienda usar el resultado del Ejercicio [72](#).

74 Ejercicio. Sean $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$, $p_1 < p_2$, y sea $x \in \ell^{p_1}(\mathbb{N})$. Demostrar que

$$\|x\|_{p_2} \leq \|x\|_{p_1}.$$

Sugerencia: considerar la sucesión $y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definida como

$$y_k := \frac{x_k}{\|x\|_{p_1}}.$$

Comparar $|y_k|^{p_2}$ con $|y_k|^{p_1}$, luego sumar la desigualdad obtenida sobre k .

75 Ejercicio. Sean $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$, $p_1 < p_2$. Mostrar que $\ell^{p_1}(\mathbb{N}) \subsetneq \ell^{p_2}(\mathbb{N})$. Para demostrar que la contención es estricta, se recomienda construir de manera explícita una sucesión x tal que $x \in \ell^{p_2}(\mathbb{N})$, pero $x \notin \ell^{p_1}(\mathbb{N})$.

76 Ejercicio. Para cada m en \mathbb{N} , denotemos por e_m a la sucesión

$$e_m := (\delta_{m,k})_{k \in \mathbb{N}}.$$

Sea $p \in [1, +\infty]$. Mostrar que $e_m \in \ell^p(\mathbb{N})$ y $\|e_m\|_p = 1$.

77 Ejercicio. Sean $p \in [1, +\infty]$, $a \in \ell^p(\mathbb{N})$, $k \in \mathbb{N}$. Mostrar que

$$|a_k| \leq \|a\|_p. \quad (4)$$

78 Ejercicio (la convergencia en $\ell^p(\mathbb{N})$ implica la convergencia por componentes). Sean $p \in [1, +\infty]$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\ell^p(\mathbb{N})$, $b \in \ell^p(\mathbb{N})$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - b\|_p = 0.$$

Para cualesquiera n, k en \mathbb{N} , denotemos por $a_{n,k}$ el k -ésimo componente de la sucesión a_n . Mostrar que para cada k en \mathbb{N} ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} = b_k.$$

79 Ejercicio (la convergencia en $\ell^p(\mathbb{N})$ no es equivalente a la convergencia por componentes). Construir una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\ell^p(\mathbb{N})$ tal que para cada k en \mathbb{N} se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} = 0,$$

pero la sucesión $\|a_n\|_p$ no converge a 0.

80 Ejercicio. Sean $p \in [1, +\infty]$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\ell^p(\mathbb{N})$, $k \in \mathbb{N}$. Mostrar que $(a_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{C} .

81 Ejercicio. Mostrar que los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$, con p en $[1, +\infty]$, son completos.

82 Ejercicio. Escribir la definición del espacio $c(\mathbb{N})$. Mostrar que $c(\mathbb{N})$ es un subespacio cerrado de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Por consecuencia, $c(\mathbb{N})$ es completo.

83 Ejercicio. Escribir la definición del espacio $c_0(\mathbb{N})$. Muestrar que $c_0(\mathbb{N})$ es un subespacio cerrado de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Por consecuencia, $c_0(\mathbb{N})$ es completo.

84 Ejercicio (sucesiones de soporte finito).

$$\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \quad a_n = 0\}.$$

Mostrar que $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ es un subconjunto de $\ell^p(\mathbb{N})$ para cada p en $[1, +\infty]$.

85 Ejercicio (la cerradura del conjunto de las sucesiones finitas). Mostrar que si $p \in [1, +\infty)$, entonces $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ es un subconjunto denso en $\ell^p(\mathbb{N})$. Encontrar la cerradura del conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ en el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

86 Ejercicio (sucesiones finitas con componentes complejos racionales). Denotemos por $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$ al subconjunto de $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ que consiste de las sucesiones finitas con valores en $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Demostrar que el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$ es numerable.

87 Ejercicio. Demostrar que la bola unitaria cerrada en $\ell^\infty(\mathbb{N})$ no es estrictamente convexa, esto es, existen x, y en $\ell^\infty(\mathbb{N})$ y λ en $(0, 1)$ tales que

$$\|x\|_\infty = 1, \quad \|y\|_\infty = 1, \quad x \neq y, \quad \|(1 - \lambda)x + \lambda y\|_\infty = 1.$$

88 Ejercicio. Demostrar que la bola unitaria cerrada en $\ell^1(\mathbb{N})$ no es estrictamente convexa, esto es, existen x, y en $\ell^1(\mathbb{N})$ y λ en $(0, 1)$ tales que

$$\|x\|_\infty = 1, \quad \|y\|_\infty = 1, \quad x \neq y, \quad \|(1 - \lambda)x + \lambda y\|_\infty = 1.$$

89 Ejercicio (mini-tarea adicional). Encontrar un espacio normado V y un subespacio cerrado W tal que para cada v en V con $\|v\| = 1$ se cumple $d(v, W) < 1$.

8. Algunos espacios de funciones acotadas

90 Ejercicio. Sea X un conjunto. Denotemos por $B(X, \mathbb{C})$ al espacio de las funciones acotadas $X \rightarrow \mathbb{C}$, con operaciones lineales punto a punto:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x),$$

y con la norma-supremo:

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Mostrar que $B(X, \mathbb{C})$ es un espacio de Banach.

91 Ejercicio. Sea X un espacio topológico. Denotemos por $C_b(X)$ al subconjunto del espacio $B(X)$ (definido en Ejercicio 90) que consiste de todas las funciones acotadas y continuas $X \rightarrow \mathbb{C}$. Mostrar que $C_b(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$. Al considerar $C_b(X)$ como un espacio normado con las operaciones lineales y la norma inducidas de $B(X)$, obtenemos un espacio de Banach.

92 Ejercicio. Sea X un espacio métrico. Denotemos por $C_{b,u}(X)$ al subconjunto del espacio $B(X)$ (definido en Ejercicio 90) que consiste de todas las funciones acotadas y uniformemente continuas $X \rightarrow \mathbb{C}$. Mostrar que $C_{b,u}(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$. Al considerar $C_{b,u}(X)$ como un espacio normado con las operaciones lineales y la norma inducidas de $B(X)$, obtenemos un espacio de Banach.

93 Ejercicio. Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $C([0, 1])$ tal que para cada k en \mathbb{N} la función f_k es derivable en $[0, 1]$ y $f'_k \in C([0, 1])$. Más aún, supongamos que $g \in C([0, 1])$, $h \in C([0, 1])$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - g\|_{\text{sup}} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|f'_k - h\|_{\text{sup}} = 0.$$

Mostrar que $g' = h$.

94 Ejercicio. Sea $C^1([0, 1])$ el conjunto de funciones continuas y continuamente derivables $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, con la norma

$$\|f\|_{C^1[0,1]} := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

Mostrar que $C^1[0, 1]$ es un espacio de Banach.

95 Ejercicio. Sea $C^m([0, 1])$ el conjunto de funciones continuas y continuamente derivables $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, con la norma

$$\|f\|_{C^m([0,1])} := \sum_{k=0}^m \frac{\|f^{(k)}\|_{\text{sup}}}{k!}.$$

Mostrar que $C^1[0, 1]$ es un espacio de Banach. Mostrar que la norma $\|f\|_{C^m([0,1])}$ tiene propiedad submultiplicativa:

$$\|fg\|_{C^m([0,1])} \leq \|f\|_{C^m([0,1])} \|g\|_{C^m([0,1])}.$$

9. Sumas de espacios normados

96 Ejercicio. Sean V y W dos espacios normados y sea $p \in [1, +\infty)$. Denotamos por $V \oplus^p W$ el producto $V \times W$ con operaciones lineales por componentes y con la norma

$$\|(a, b)\| := (\|a\|_V^p + \|b\|_W^p)^{1/p}.$$

Explicar por qué esta función en realidad es una norma. Demostrar que $V \oplus^p W$ es completo si, y sólo si, V y W son completos.

97 Ejercicio. Sean V y W dos espacios normados separables y sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar que el espacio $V \oplus^p W$ es separable.

98 Ejercicio. Sea $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios normados y sea $p \in [1, +\infty)$. Explicar la definición de la suma de espacios $\bigoplus_{j \in \mathbb{N}}^p V_j$.

99 Ejercicio. En las condiciones del Ejercicio 98, recordar la definición de las proyecciones canónicas $P_k: \bigoplus_{j \in \mathbb{N}}^p V_j \rightarrow V_k$. Sea $k \in \mathbb{N}$. Demostrar que la función P_k es continua y abierta.

100 Ejercicio. En las condiciones del Ejercicio 98, para $s \in \mathbb{N}$, definimos el encaje canónico $E_s: V_s \rightarrow \bigoplus_{j \in \mathbb{N}}^p V_j$ mediante la siguiente regla:

$$E_s(u)_j := \begin{cases} u, & j = s; \\ 0_{V_j}, & j \neq s. \end{cases}$$

101 Ejercicio. Sea $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios de Banach y sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar que el espacio $\bigoplus_{j \in \mathbb{N}}^p V_j$ es completo.

102 Ejercicio. Sea $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios normados y sea $p \in [1, +\infty)$. Supongamos que el espacio $\bigoplus_{j \in \mathbb{N}}^p V_j$ es completo. Demostrar que para cada $s \in \mathbb{N}$ el espacio V_s es completo.

10. Espacios cocientes

103 Ejercicio. Sea V un espacio vectorial y sea W un subespacio de V . Explicar la definición del espacio vectorial V/W .

104 Ejercicio. Sean (V, N) un espacio seminormado y W un subespacio de V . Demostrar que la siguiente función es una seminorma en V :

$$\nu(X) := \inf_{x \in X} N(x) \quad (X \in V/W).$$

105 Ejercicio. Sea (V, N) un espacio seminormado y sea W un subespacio de V . Definimos ν como en el ejercicio anterior. Demostrar que ν es una norma si, y solo si, W es cerrado.

106 Ejercicio. Sea V un espacio vectorial complejo y sea $N: V \rightarrow [0, +\infty)$ una seminorma en V . En otras palabras, N es subaditiva y homogénea absoluta. Pongamos

$$Z := \{a \in V : N(a) = 0\}.$$

Mostrar cómo convertir V/Z en un espacio normado.

107 Ejercicio. Sean V un espacio normado y W un subespacio cerrado de V . Explicar cómo se define la norma en V/W y demostrar que realmente es una norma.

108 Ejercicio. Sean V un espacio de Banach y W un subespacio cerrado de V . Demostrar que V/W es un espacio de Banach. Se recomienda usar el resultado del Ejercicio 12.

109 Ejercicio. Sean V un espacio vectorial y W un subespacio cerrado de V . Definimos $Q: V \rightarrow V/W$ mediante la regla $Q(a) := a + W$. Es fácil ver que Q es una transformación lineal. Mostrar que Q es continua y abierta.

110 Ejercicio. Demostrar que el espacio $c(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N})$ es isométricamente isomorfo a \mathbb{C} . Se recomienda construir una transformación lineal $F: \mathbb{C} \rightarrow c(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N})$ y mostrar que es un isomorfismo isométrico.

111 Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal. Supongamos que $\ker(f)$ es un subespacio cerrado de V . Demostrar que el funcional f es continuo.

112 Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio cerrado de V . Supongamos que W es separable y V/W es separable. Demostrar que V es separable.

113 Ejercicio. En el espacio \mathbb{C}^2 con la norma $\|\cdot\|_1$ consideramos el subespacio $W = \ell(a)$ y el vector v :

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcular $\|v + W\|_{V/W}$.

11. Espacios de funciones medibles e integrables

En los ejercicios de esta parte suponemos que (X, \mathcal{F}, μ) es un espacio de medida. Denotamos por $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ al conjunto de todas las funciones complejas \mathcal{F} -medibles (este conjunto con las operaciones punto a punto es un álgebra compleja).

114 Ejercicio. Recordar la definición de la función $N_\infty: \mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \rightarrow [0, +\infty]$. Mostrar que N_∞ es una seminorma extendida, es decir, N_∞ es subaditiva y absolutamente homogénea.

115 Ejercicio. Recordar la definición del espacio seminormado $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$. Se recomienda aplicar los resultados de los Ejercicios 114 y 2.

116 Ejercicio. Recordar la definición del espacio normado $L^\infty(X, \mu)$. Se recomienda aplicar los resultados de los Ejercicios 115 y 106.

117 Ejercicio. Mostrar que el espacio $L^\infty(X, \mu)$ es completo.

118 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Recordar la definición de función $N_p: \mathcal{M}(X, \mu) \rightarrow [0, +\infty]$. Demostrar que N_p es absolutamente homogénea.

119 Ejercicio (desigualdad de Hölder para funciones complejas medibles). Sean $p, q \in (1, +\infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$. Demostrar que

$$N_1(fg) \leq N_p(f)N_q(g).$$

120 Ejercicio. Sean $p, q \in (1, +\infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mu)$ tales que $N_p(f) < +\infty$ y $N_q(g) < +\infty$. Determinar, cuándo se tiene la igualdad

$$N_1(fg) = N_p(f)N_q(g).$$

Se recomienda usar el resultado del Ejercicio 66.

121 Ejercicio (desigualdad de Minkowski para funciones complejas medibles). Sea $p \in [1, +\infty)$ y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mu)$. Demostrar que

$$N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

122 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad de Minkowski). Sea $p \in [1, +\infty)$ y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ tales que $N_p(f) < +\infty$ y $N_p(g) < +\infty$. Determinar, cuándo se tiene la igualdad $N_p(f + g) = N_p(f) + N_p(g)$.

123 Ejercicio. Recordar la definición del espacio seminormado $\mathcal{L}^p(X, \mu)$. Se recomienda usar los resultados de los Ejercicios 118, 121 y 2.

124 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Recordar la definición del espacio normado $L^p(X, \mu)$. Se recomienda usar los resultados de los Ejercicios 123 y 106.

125 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar que el espacio $L^p(X, \mu)$ es completo. Se recomienda utilizar el hecho que en una sucesión de Cauchy en medida se puede encontrar una subsucesión que converge casi uniformemente y, en particular, casi en todos puntos.

126 Ejercicio. Sea $p \in (1, +\infty)$. Demostrar que la bola unitaria cerrada en el espacio $L^p(X, \mu)$ es estrictamente convexa, esto es, para cualesquiera F, G en $L^p(X, \mu)$ con $\|F\|_p = 1$, $\|G\|_p = 1$ y $F \neq G$ (para las funciones representantes esto significa que no son iguales μ -c.t.p.), y para cualquier λ en $(0, 1)$,

$$\|(1 - \lambda)F + \lambda G\|_p < 1.$$

Se recomienda usar el resultado del Ejercicio 122.

12. Bases de Schauder

127 Ejercicio. Recordar la definición de una base de Hamel. Demostrar que V es un espacio de Banach de dimensión infinita (es decir, V no tiene base finita), entonces V no tiene de Hamel base numerable. Sugerencia: si $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una base de Hamel, considerar los subespacios $W_m := \ell(b_1, \dots, b_m)$ y aplicar el teorema de Baire.

128 Definición. Sea V un espacio normado complejo. Una sucesión $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vectores en V se llama *base de Schauder* si para cada v en V existe una única sucesión $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{C} tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^m \alpha_n b_n - v \right\| = 0.$$

129 Ejercicio. Sea $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base de Schauder de V . Mostrar que la sucesión $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es linealmente independiente, esto es, para cada m en \mathbb{N} y cualquiera $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ en \mathbb{C} , si

$$\sum_{n=1}^m \alpha_n b_n = 0_V,$$

entonces $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$.

130 Ejercicio. Sea $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base de Schauder de V . Para cada m en \mathbb{N} denotemos por W_m al subespacio generado por b_1, \dots, b_m :

$$W_m := \ell(b_1, \dots, b_m).$$

Mostrar que el conjunto $\bigcup_{m=1}^{\infty} W_m$ es denso en V .

131 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Mostrar que $(e_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder de $\ell^p(\mathbb{N})$.

132 Ejercicio. Mostrar que la sucesión $(e_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder de $c_0(\mathbb{N})$.

133 Ejercicio. Encontrar una base de Schauder de $c(\mathbb{N})$. Enunciar la respuesta y hacer una demostración completa.

13. Algunos espacios separables y no separables

134 Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo con una base de Schauder $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Mostrar que V es separable.

135 Ejercicio. Mostrar que los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$, con $p \in [1, +\infty)$, son separables.

136 Ejercicio. Mostrar que el espacio $c_0(\mathbb{N})$ es separable.

137 Ejercicio. Mostrar que el espacio $c(\mathbb{N})$ es separable.

138 Ejercicio. Sean V un espacio vectorial normado, $\delta > 0$ y S un subconjunto no numerable de V tal que para cualesquier a, b en S , si $a \neq b$, entonces $\|a - b\| \geq \delta$. Demostrar que V no es separable.

139 Ejercicio. Demostrar que el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es no separable.