Espacios de Banach

Problemas para examen

En todos estos problemas suponemos que los espacios vectoriales son complejos. Sin embargo, la mayor parte de esta teoría es válida también para espacios reales.

Definición de espacios normados y de Banach

1 Ejercicio (definición del espacio normado)**.** Sea V un espacio vectorial complejo. Escribir la definición de una *seminorma* en V. Escribir la definición de una *seminorma extendida* en V (se admite el valor $+\infty$). Escribir la definición de una *norma* en V.

2 Ejercicio. Sea V un espacio vectorial complejo y sea $N\colon V \to [0, +\infty]$ una seminorma extendida, es decir, una función subaditiva y homogénea absoluta:

$$N(a+b) \le N(a) + N(b), \qquad N(\lambda a) = |\lambda| N(a).$$

Pongamos $W := \{a \in V\colon\ N(a) < +\infty\}$. Mostrar que W es un subespacio vectorial de V.

3 Ejercicio. ¿Qué es un *espacio de Banach*?

4 Ejercicio (criterio de completez de espacios normados)**.** Sea V un espacio normado. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) V es completo;

(b) para cada sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en V, si $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|a_k\| < +\infty$, entonces la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ converge en V, esto es, existe un vector b en V tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| b - \sum_{k=1}^{n} a_k \right\| = 0.$$

La implicacion (a)⇒(b) se conoce como “M-prueba de Weierstrass” (Weierstrass M-test).

5 Ejercicio (desigualdad inversa del triángulo para seminormas)**.** Sea (V, N) un espacio seminormado. Demostrar que para cualesquiera u, v en V,

$$|N(u) - N(v)| \le N(u - v).$$

6 Ejercicio (completación de un espacio normado, mini-tarea adicional)**.** Sea V un espacio normado. Explicar cómo construir un espacio de Banach W y una transformación lineal isométrica $f\colon V \to W$ tal que $f[V]$ sea denso en W.

Bolas en espacios normados

Sea V un espacio vectorial complejo normado.

7 Ejercicio. Recordar la definición de conjuntos convexos en espacios vectoriales reales o complejos.

8 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Demostrar que la bola $B(a, r)$ es convexa.

9 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Demostrar que

$$B(a, r) = a + rB(0, 1).$$

10 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$\lambda B(a, r) = B(\lambda a, |\lambda| r).$$

11 Ejercicio. Sean $r_1, r_2 > 0$. Demostrar que

$$B(0, r_1) + B(0, r_2) = B(0, r_1 + r_2).$$

12 Ejercicio. Sean $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$. Demostrar que

$$B(a_1, r_1) + B(a_2, r_2) = B(a_1 + a_2, r_1 + r_2).$$

13 Ejercicio (algunas propiedades de bolas en espacios métricos, repaso)**.** Sea (X, d) un espacio métrico o pseudométrico. Demostrar las siguientes propiedades de bolas.

- Si $a \in X$ y $r_1 \le r_2$, entonces $B(a, r_1) \subseteq B(a, r_2)$.
- Si $a_1, a_2 \in X$ y $d(a_1, a_2) + r_1 \le r_2$, entonces $B(a_1, r_1) \subseteq B(a_2, r_2)$.
- Si $a_1, a_2 \in X$ y $d(a_1, a_2) \ge r_1 + r_2$, entonces $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \varnothing$.
- $\mathrm{cl}(B(a, r)) \subseteq C(a, r)$, donde $C(a, r) := \{x \in X\colon\ d(x, a) \le r\}$.
- $B(a, r) \subseteq \mathrm{int}(C(a, r))$.

14 Ejercicio. Recordar la definición de la topología inducida por una métrica o pseudométrica. Repetir esta definición en el caso particular cuando la pseudométrica está inducida por una seminorma.

15 Ejercicio. Supongamos que (V, N) es un espacio seminormado complejo. Demostrar que V es de Hausdorff si, y solo si, N es una norma.

16 Ejercicio (propiedades "malas" de bolas en espacios métricos, repaso)**.** Mostrar con ejemplos que las propiedades anteriores, en general, no se pueden "invertir".

- Encontrar un espacio métrico X, un punto $a \in X$ y dos números $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 > r_2$, pero $B(a, r_1) \subseteq B(a, r_2)$.
- Encontrar un espacio métrico X, dos puntos $a_1, a_2 \in X$ y dos números $r_1, r_2 > 0$ tales que $d(a_1, a_2) + r_1 > r_2$, pero $B(a_1, r_1) \subseteq B(a_2, r_2)$.
- Encontrar un espacio métrico X, dos puntos $a_1, a_2 \in X$ y dos números $r_1, r_2 > 0$ tales que $d(a_1, a_2) < r_1 + r_2$, pero $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \varnothing$.
- Encontrar un espacio métrico, un punto $a \in X$ y un número $r > 0$ tales que $\mathrm{cl}(B(a, r)) \ne C(a, r)$.
- Encontrar un espacio métrico, un punto $a \in X$ y un número $r > 0$ tales que $\mathrm{int}(C(a, r)) \ne B(a, r)$.

Mostremos que en espacios normados las bolas son “más rídigas” que en espacios métricos generales. Para demostrar que ciertos conjuntos son no vacíos, se recomienda construir explícitamente elementos de estos conjuntos, usando los datos iniciales del ejercicio.

17 Ejercicio. Supongamos que $V \neq \{0_V\}$. Sean $a \in V$, $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 > r_2$. Demostrar que $B(a, r_1) \setminus B(a, r_2) \neq \varnothing$.

18 Ejercicio. Supongamos que $V \neq \{0_V\}$. Sean $a_1, a_2 \in V$ y $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$r_1 + \|a_1 - a_2\| > r_2.$$

Demostrar que $B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2) \neq \varnothing$.

19 Ejercicio. Sean $a_1, a_2 \in V$ y $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$\|a_1 - a_2\| < r_1 + r_2.$$

Mostrar que $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \neq \varnothing$.

20 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Mostrar que $\mathrm{cl}(B(a, r)) = C(a, r)$.

21 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Mostrar que $\mathrm{int}(C(a, r)) = B(a, r)$.

22 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Mostrar que la esfera $S(a, r) \coloneqq \{x \in X\colon\ d(x, a) = r\}$ es la frontera de $B(a, r)$. Mostrar que $S(a, r)$ es la frontera de $C(a, r)$.

23 Ejercicio. Sea V un espacio normado tal que $V \neq \{0_V\}$, y sean $a \in V$, $r > 0$. Demostrar que la bola abierta $B(a, r)$ no es un conjunto cerrado. Demostrar que la bola cerrada $C(a, r)$ no es un conjunto abierto.

Propiedades especiales de topologías en espacios normados

Sea V un espacio normado complejo.

24 Ejercicio. Demostrar que la operación de adición $V \times V \to V$ es continua.

25 Ejercicio. Demostrar que la operación de multiplicación de escalares por vectores $\mathbb{C} \times V \to V$ es continua.

26 Ejercicio. Sea $a \in V$. Demostrar que la función $f\colon V \to V$, $f(x) \coloneqq a + x$, es un homeomorfismo.

27 Ejercicio. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que la función $g\colon V \to V$, $g(x) \coloneqq \lambda x$, es un homeomorfismo.

28 Ejercicio. Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que la función $h\colon V \to V$, $h(x) \coloneqq a + \lambda x$, es un homeomorfismo.

29 Ejercicio. Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $X \subseteq V$.

- Demostrar que si X es abierto, entonces $a + \lambda X$ es abierto.
- Demostrar que si X es cerrado, entonces $a + \lambda X$ es cerrado.

30 Ejercicio. Sea W un subespacio de V. Demostrar que $\operatorname{cl}(W)$ es un subespacio de V.

31 Ejercicio. Sea W un subespacio de V tal que $\operatorname{int}(W) \neq \varnothing$. Demostrar que $W = V$. (Consecuencia: si $W \neq V$, entonces $\operatorname{int}(W) = \varnothing$.)

32 Ejercicio. Sea W un subespacio de V tal que $W \neq V$. Demostrar que la frontera de W es un subespacio de V.

33 Ejercicio. Sea $X \subseteq V$ y sea Y un subconjunto abierto de V. Demostrar que el conjunto $X + Y$ es abierto.

34 Ejercicio (micro-tarea adicional)**.** Sea V un espacio normado y sea X un subconjunto abierto de V. Demostrar que X es conexo si, y solo si, X es arco-conexo.

Comparación de normas o seminormas

Sea V un espacio vectorial complejo.

35 Ejercicio. Sean N_1 y N_2 dos seminormas en V. Escribimos $N_1 \le N_2$, si para cada v en V se cumple $N_1(v) \le N_2(v)$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $N_1 \le N_2$.

(b) $B_{N_2}(0_V, 1) \subseteq B_{N_1}(0_V, 1)$, esto es, para cada v con $N_2(v) < 1$, se cumple $N_1(v) < 1$.

(c) $C_{N_2}(0_V, 1) \subseteq C_{N_1}(0_V, 1)$, esto es, para cada v con $N_2(v) \le 1$, se cumple $N_1(v) \le 1$.

(d) $B_{N_2}(0_V, 1) \subseteq C_{N_1}(0_V, 1)$, esto es, para cada v con $N_2(v) < 1$, se cumple $N_1(v) \le 1$.

36 Ejercicio. Sean N_1 y N_2 dos seminormas en un espacio vectorial V. Decimos que N_1 está *dominada* por N_2 y escribimos $N_1 \preceq N_2$, si existe un número $C \ge 0$ tal que $N_1(v) \le C N_2(v)$ para cada v en V. Demostrar que la relación $\preceq$ es transitiva y reflexiva.

37 Ejercicio. Sean N_1 y N_2 dos seminormas en un espacio vectorial V. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $N_1 \preceq N_2$;

(b) existe $\delta > 0$ tal que $B_2(0, \delta) \subseteq B_1(0, 1)$;

(c) para cada $r_1 > 0$ existe $r_2 > 0$ tal que $B_2(0, r_2) \subseteq B_1(0, r_1)$;

(d) $\tau_1 \subseteq \tau_2$, donde τ_1 y τ_2 son las topologías inducidas por las seminormas N_1 y N_2, respectivamente.

38 Ejercicio. Sean N_1 y N_2 dos seminormas en un espacio vectorial V. Escribimos $N_1 \cong N_2$ si $N_1 \preceq N_2$ y $N_2 \preceq N_1$. Demostrar que $\cong$ es una relación de equivalencia. Cuando $N_1 \cong N_2$, se dice simplemente que las seminormas N_1 y N_2 son equivalentes. Usando el resultado del Ejercicio 37, mostrar que dos seminormas son equivalentes si, y solo si, estas seminormas inducen la misma topología.

Normas en $\mathbb{C}^n$

Suponemos que $n \in \mathbb{N}$.

39 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Escribir la fórmula para la norma $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{C}^n$. Justificar que $\|\cdot\|_p$ es una norma.

40 Ejercicio. Escribir la fórmula para la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{C}^n$. Justificar que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma. Demostrar que para cada a en $\mathbb{C}^n$

$$\|a\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|a\|_p.$$

41 Ejercicio. Mostrar de manera directa que las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes.

42 Ejercicio. Sean $p \in [1, +\infty]$, $a \in \mathbb{C}^n$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Mostrar que

$$|a_k| \le \|a\|_p. \tag{1}$$

43 Ejercicio. Sean $p \in [1, +\infty]$, $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{C}^n$. Mostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\|a_m - b\|_p \to 0$ cuando $m \to \infty$;

(b) para cada k en $\{1, \ldots, n\}$, $\lim_{m\to\infty} a_{m,k} = b_k$.

44 Ejercicio. Sean $p \in [1, +\infty]$, $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}^n$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}^n$;

(b) para cada k en $\{1, \ldots, n\}$, $(a_{m,k})_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

45 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty]$. Mostrar que el espacio $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$ es completo.

46 Ejercicio. Sea $N \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$ una norma. Dotamos $\mathbb{C}^n$ de la topología inducida por $\|\cdot\|_2$. Demostrar que la función N es continua.

47 Ejercicio. Sea $N \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$ una norma. Mostrar que $N \cong \|\cdot\|_2$.

48 Ejercicio. Mostrar que cualesquiera dos normas en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes.

49 Ejercicio. Sea N una norma en $\mathbb{C}^n$. Mostrar que el espacio $(\mathbb{C}^n, N)$ es completo.

50 Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita. Demostrar que V es completo.

51 Ejercicio. Sea V un espacio normado completo de dimensión finita.

- Demostrar que si X es un subconjunto acotado en V, entonces X es totalmente acotado.

- Demostrar que si Y es un subconjunto acotado y cerrado en V, entonces Y es compacto.

52 Ejercicio. Sea V un espacio normado y sea W un subespacio de V de dimensión finita. Demostrar que W es cerrado en V.

Teorema de Riesz sobre las esferas y bolas en un espacio normado de dimensión infinita

53 Ejercicio (lema de Riesz)**.** Sean V un espacio normado, W un subespacio cerrado de V tal que $W \neq V$, y $r \in (0, 1)$. Demostrar que existe v en V tal que $\|v\| = 1$ y $d(v, W) \geq r$.

54 Ejercicio (teorema de Riesz)**.** Sea V un espacio normado de dimensión infinita. Demostrar que la esfera unitaria $S := \{v \in V \colon \ \|v\| = 1\}$ no es totalmente acotada en V. Demostrar que la bola cerrada $C := \{v \in V \colon \ \|v\| \leq 1\}$ y la bola abierta $B(0_V, 1)$ tampoco son totalmente acotadas. Demostrar que S y C no son conjuntos compactos.

Espacios de sucesiones

55 Ejercicio (desigualdad de Young, el caso de igualdad)**.** Sean $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, y sean $a, b \geq 0$. Usando la convexidad estricta de la función exponencial real demostrar la igualdad de Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

y determinar, cuándo se cumple la igualdad

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

56 Ejercicio. Sean $p, q \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x, y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Recordar una demostración de la desigualdad de Hölder

$$N_1(xy) \leq N_p(x)N_q(y).$$

57 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad de Hölder)**.** Sean $p, q \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x, y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Determinar cuándo se cumple la igualdad

$$N_1(xy) = N_p(x)N_q(y).$$

58 Ejercicio. Recordar una demostración de la desigualdad de Minkowski para la norma $\|\cdot\|_p$.

59 Ejercicio. Recordar la definición del espacio $\ell^p(\mathbb{N})$ para p en $[1, +\infty)$ y para $p = +\infty$.

60 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad de Minkowski para sucesiones)**.** . Sean $p \in (1, +\infty)$, $x, y \in \ell^p(\mathbb{N})$. Determinar cuándo se cumple la igualdad

$$\|x + y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

61 Ejercicio. Sea $p \in (1, +\infty)$. Demostrar que la bola unitaria cerrada en el espacio $\ell^p(\mathbb{N})$ es estrictamente convexa, esto es, para cualesquiera x, y en $\ell^p(\mathbb{N})$ con $x \neq y$, $\|x\|_p = 1$, $\|y\|_p = 1$, y cualquier λ en $(0, 1)$,

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y\|_p < 1.$$

Se recomienda usar el resultado del Ejercicio 60.

62 Ejercicio. Sean $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$, $p_1 < p_2$, y sea $x \in \ell^{p_1}(\mathbb{N})$. Demostrar que

$$\|x\|_{p_2} \le \|x\|_{p_1}.$$

Sugerencia: considerar la sucesión $y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definida como

$$y_k \coloneqq \frac{x_k}{\|x\|_{p_1}}.$$

Comparar $|y_k|^{p_2}$ con $|y_k|^{p_1}$, luego sumar la desigualdad obtenida sobre k.

63 Ejercicio. Sean $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$, $p_1 < p_2$. Mostrar que $\ell^{p_1}(\mathbb{N}) \subsetneq \ell^{p_2}(\mathbb{N})$. Para demostrar que la contención es estricta, se recomienda construir de manera explícita una sucesión x tal que $x \in \ell^{p_2}(\mathbb{N})$, pero $x \notin \ell^{p_1}(\mathbb{N})$.

64 Ejercicio. Para cada m en $\mathbb{N}$, denotemos por e_m a la sucesión

$$e_m \coloneqq (\delta_{m,k})_{k\in\mathbb{N}}.$$

Sea $p \in [1, +\infty]$. Mostrar que $e_m \in \ell^p(\mathbb{N})$ y $\|e_m\|_p = 1$.

65 Ejercicio. Sean $p \in [1, +\infty]$, $a \in \ell^p(\mathbb{N})$, $k \in \mathbb{N}$. Mostrar que

$$|a_k| \le \|a\|_p. \tag{2}$$

66 Ejercicio (la convergencia en $\ell^p(\mathbb{N})$ implica la convergencia por componentes)**.** Sean $p \in [1, +\infty]$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\ell^p(\mathbb{N})$, $b \in \ell^p(\mathbb{N})$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n - b\|_p = 0.$$

Para cualesquiera n, k en $\mathbb{N}$, denotemos por $a_{n,k}$ el k-ésimo componente de la sucesión a_n. Mostrar que para cada k en $\mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = b_k.$$

67 Ejercicio (la convergencia en $\ell^p(\mathbb{N})$ no es equivalente a la convergencia por componentes)**.** Construir una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\ell^p(\mathbb{N})$ tal que para cada k en $\mathbb{N}$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0,$$

pero la sucesion $\|a_n\|_p$ no converge a 0.

68 Ejercicio. Sean $p \in [1, +\infty]$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\ell^p(\mathbb{N})$, $k \in \mathbb{N}$. Mostrar que $(a_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

69 Ejercicio. Mostrar que los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$, con p en $[1, +\infty]$, son completos.

70 Ejercicio. Escribir la definición del espacio $c(\mathbb{N})$. Mostrar que $c(\mathbb{N})$ es un subespacio cerrado de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Por consecuencia, $c(\mathbb{N})$ es completo.

71 Ejercicio. Escribir la definición del espacio $c_0(\mathbb{N})$. Muestrar que $c_0(\mathbb{N})$ es un subespacio cerrado de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Por consecuencia, $c_0(\mathbb{N})$ es completo.

72 Ejercicio (sucesiones finitas)**.**

$$\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \coloneqq \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \colon \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \quad a_n = 0\}.$$

Mostrar que $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ es un subconjunto de $\ell^p(\mathbb{N})$ para cada p en $[1, +\infty]$.

73 Ejercicio (la cerradura del conjunto de las sucesiones finitas)**.** Mostrar que si $p \in [1, +\infty)$, entonces $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ es un subconjunto denso en $\ell^p(\mathbb{N})$. Encontrar la cerradura del conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ en el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

74 Ejercicio (sucesiones finitas con componentes complejos racionales)**.** Denotemos por $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})$ al subconjunto de $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ que consiste de las sucesiones finitas con valores en $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q}$. Demostrar que el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})$ es numerable.

75 Ejercicio. Demostrar que la bola unitaria cerrada en $\ell^\infty(\mathbb{N})$ no es estrictamente convexa, esto es, existen x, y en $\ell^\infty(\mathbb{N})$ y λ en $(0, 1)$ tales que

$$\|x\|_\infty = 1, \qquad \|y\|_\infty = 1, \qquad x \neq y, \qquad \|(1-\lambda)x + \lambda y\|_\infty = 1.$$

76 Ejercicio. Demostrar que la bola unitaria cerrada en $\ell^1(\mathbb{N})$ no es estrictamente convexa, esto es, existen x, y en $\ell^1(\mathbb{N})$ y λ en $(0, 1)$ tales que

$$\|x\|_\infty = 1, \qquad \|y\|_\infty = 1, \qquad x \neq y, \qquad \|(1-\lambda)x + \lambda y\|_\infty = 1.$$

77 Ejercicio (mini-tarea adicional)**.** Encontrar un espacio normado V y un subespacio cerrado W tal que para cada v en V con $\|v\| = 1$ se cumple $d(v, W) < 1$.

Algunos espacios de funciones acotadas

78 Ejercicio. Sea X un conjunto. Denotemos por $B(X, \mathbb{C})$ al espacio de las funciones acotadas $X \to \mathbb{C}$, con operaciones lineales punto a punto:

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \qquad (\alpha f)(x) \coloneqq \alpha f(x),$$

y con la norma-supremo:

$$\|f\| \coloneqq \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Mostrar que $B(X, \mathbb{C})$ es un espacio de Banach.

79 Ejercicio. Sea X un espacio topológico. Denotemos por $C_b(X)$ al subconjunto del espacio $B(X)$ (definido en Ejercicio 78) que consiste de la todas las funciones acotadas y continuas $X \to \mathbb{C}$. Mostrar que $C_b(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$. Al considerar $C_b(X)$ como un espacio normado con las operaciones lineales y la norma inducidas de $B(X)$, obtenemos un espacio de Banach.

80 Ejercicio. Sea X un espacio métrico. Denotemos por $C_{b,u}(X)$ al subconjunto del espacio $B(X)$ (definido en Ejercicio 78) que consiste de la todas las funciones acotadas y uniformemente continuas $X \to \mathbb{C}$. Mostrar que $C_{b,u}(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$. Al considerar $C_{b,u}(X)$ como un espacio normado con las operaciones lineales y la norma inducidas de $B(X)$, obtenemos un espacio de Banach.

81 Ejercicio. Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $C([0,1])$ tal que para cada k en $\mathbb{N}$ la función f_k es derivable en $[0,1]$ y $f_k' \in C([0,1])$. Más aún, supongamos que $g \in C([0,1])$, $h \in C([0,1])$,

$$\lim_{k \to \infty} \|f_k - g\|_{\sup} = 0, \qquad \lim_{k \to \infty} \|f_k' - h\|_{\sup} = 0.$$

Demostrar que $g' = h$.

82 Ejercicio. Sea $C^1([0,1])$ el conjunto de funciones continuas y continuamente derivables $[0,1] \to \mathbb{C}$, con la norma

$$\|f\|_{C^1[0,1]} \coloneqq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

Mostrar que $C^1[0,1]$ es un espacio de Banach.

83 Ejercicio. Sea $C^m([0,1])$ el conjunto de funciones continuas y continuamente derivables $[0,1] \to \mathbb{C}$, con la norma

$$\|f\|_{C^m([0,1])} \coloneqq \sum_{k=0}^{m} \frac{\|f^{(k)}\|_{\sup}}{k!}.$$

Mostrar que $C^1[0,1]$ es un espacio de Banach. Mostrar que la norma $\|f\|_{C^m([0,1])}$ tiene propiedad submultiplicativa:

$$\|fg\|_{C^m([0,1])} \le \|f\|_{C^m([0,1])} \, \|g\|_{C^m([0,1])}.$$

Sumas de espacios normados

84 Ejercicio. Sean V y W dos espacios normados y sea $p \in [1, +\infty)$. Denotamos por $V \oplus^p W$ el producto $V \times W$ con operaciones lineales por componentes y con la norma

$$\|(a,b)\| \coloneqq \left(\|a\|_V^p + \|b\|_W^p\right)^{1/p}.$$

Explicar por qué esta función en realidad es una norma. Demostrar que $V \oplus^p W$ es completo si, y sólo si, V y W son completos.

85 Ejercicio. Sean V y W dos espacios normados separables y sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar que el espacio $V \oplus^p W$ es separable.

86 Ejercicio. Sea $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios normados y sea $p \in [1, +\infty)$. Explicar la definición de la suma de espacios $\bigoplus^p_{j\in\mathbb{N}} V_j$.

87 Ejercicio. En las condiciones del Ejercicio 86, recordar la definición de las proyecciones canónicas $P_k \colon \bigoplus^p_{j\in\mathbb{N}} V_j \to V_k$. Sea $k \in \mathbb{N}$. Demostrar que la función P_k es continua y abierta.

88 Ejercicio. En las condiciones del Ejercicio 86, para s en $\mathbb{N}$, definimos el encaje canónico $E_s \colon V_s \to \bigoplus^p_{j\in\mathbb{N}} V_j$ mediante la siguiente regla:

$$E_s(u)_j \coloneqq \begin{cases} u, & j = s; \\ 0_{V_j}, & j \ne s. \end{cases}$$

89 Ejercicio. Sea $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios de Banach y sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar que el espacio $\bigoplus_{j\in\mathbb{N}}^{p} V_j$ es completo.

90 Ejercicio. Sea $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios normados y sea $p \in [1, +\infty)$. Supongamos que el espacio $\bigoplus_{j\in\mathbb{N}}^{p} V_j$ es completo. Demostrar que para cada s en $\mathbb{N}$ el espacio V_s es completo.

Espacios cocientes

91 Ejercicio. Sea V un espacio vectorial y sea W un subespacio de V. Explicar la definición del espacio vectorial V/W.

92 Ejercicio. Sean (V, N) un espacio seminormado y W un subespacio de V. Demostrar que la siguiente función es una seminorma en V:

$$\nu(X) \coloneqq \inf_{x\in X} N(x) \qquad (X \in V/W).$$

93 Ejercicio. Sea (V, N) un espacio seminormado y sea W un subespacio de V. Definimos ν como en el ejercicio anterior. Demostrar que ν es una norma si, y solo si, W es cerrado.

94 Ejercicio. Sea V un espacio vectorial complejo y sea $N\colon V \to [0, +\infty)$ una seminorma en V. En otras palabras, N es subaditiva y homogénea absoluta. Pongamos

$$Z \coloneqq \{a \in V\colon\ N(a) = 0\}.$$

Mostrar cómo convertir V/Z en un espacio normado.

95 Ejercicio. Sean V un espacio normado y W un subespacio cerrado de V. Explicar cómo se define la norma en V/W y demostrar que realmente es una norma.

96 Ejercicio. Sean V un espacio de Banach y W un subespacio cerrado de V. Demostrar que V/W es un espacio de Banach. Se recomienda usar el resultado del Ejercicio 4.

97 Ejercicio. Sean V un espacio vectorial y W un subespacio cerrado de V. Definimos $Q\colon V \to V/W$ mediante la regla $Q(a) \coloneqq a + W$. Es fácil ver que Q es una transformación lineal. Mostrar que Q es continua y abierta.

98 Ejercicio. Demostrar que el espacio $c(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N})$ es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$. Se recomienda construir una transformación lineal $F\colon \mathbb{C} \to c(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N})$ y mostrar que es un isomorfismo isométrico.

99 Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal. Supongamos que $\ker(f)$ es un subespacio cerrado de V. Demostrar que el funcional f es continuo.

100 Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio cerrado de V. Supongamos que W es separable y V/W es separable. Demostrar que V es separable.

101 Ejercicio. En el espacio $\mathbb{C}^2$ con la norma $\|\cdot\|_1$ consideramos el subespacio $W = \ell(a)$ y el vector v:

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcular $\|v + W\|_{V/W}$.

Espacios de funciones medibles e integrables

En los ejercicios de esta parte suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida. Denotamos por $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ al conjunto de todas las funciones complejas $\mathcal{F}$-medibles (este conjunto con las operaciones punto a punto es un álgebra compleja).

102 Ejercicio. Recordar la definición de la función $N_\infty\colon \mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \to [0, +\infty]$. Mostrar que N_∞ es una seminorma extendida, es decir, N_∞ es subaditiva y absolutamente homogénea.

103 Ejercicio. Recordar la definición del espacio seminormado $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$. Se recomienda aplicar los resultados de los Ejercicios 102 y 2.

104 Ejercicio. Recordar la definición del espacio normado $L^\infty(X, \mu)$. Se recomienda aplicar los resultados de los Ejercicios 103 y 94.

105 Ejercicio. Mostrar que el espacio $L^\infty(X, \mu)$ es completo.

106 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Recordar la definición de función $N_p\colon \mathcal{M}(X, \mu) \to [0, +\infty]$. Demostrar que N_p es absolutamente homogénea.

107 Ejercicio (desigualdad de Hölder para funciones complejas medibles)**.** Sean $p, q \in (1, +\infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$. Demostrar que

$$N_1(fg) \leq N_p(f)N_q(g).$$

108 Ejercicio. Sean $p, q \in (1, +\infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mu)$ tales que $N_p(f) < +\infty$ y $N_q(g) < +\infty$. Determinar, cuándo se tiene la igualdad

$$N_1(fg) = N_p(f)N_q(g).$$

Se recomienda usar el resultado del Ejercicio 55.

109 Ejercicio (desigualdad de Minkowski para funciones complejas medibles)**.** Sea $p \in [1, +\infty)$ y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mu)$. Demostrar que

$$N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

110 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad de Minkowski)**.** Sea $p \in [1, +\infty)$ y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ tales que $N_p(f) < +\infty$ y $N_p(g) < +\infty$. Determinar, cuándo se tiene la igualdad $N_p(f + g) = N_p(f) + N_p(g)$.

111 Ejercicio. Recordar la definición del espacio seminormado $\mathcal{L}^p(X, \mu)$. Se recomienda usar los resultados de los Ejercicios 106, 109 y 2.

112 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Recordar la definición del espacio normado $L^p(X, \mu)$. Se recomienda usar los resultados de los Ejercicios 111 y 94.

113 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar que el espacio $L^p(X, \mu)$ es completo. Se recomienda utilizar el hecho que en una sucesión de Cauchy en medida se puede encontrar una subsucesión que converge casi uniformemente y, en particular, casi en todos puntos.

114 Ejercicio. Sea $p \in (1, +\infty)$. Demostrar que la bola unitaria cerrada en el espacio $L^p(X, \mu)$ es estrictamente convexa, esto es, para cualesquiera F, G en $L^p(X, \mu)$ con $\|F\|_p = 1$, $\|G\|_p = 1$ y $F \neq G$ (para las funciones representantes esto significa que no son iguales μ-c.t.p.), y para cualquier λ en $(0, 1)$,

$$\|(1 - \lambda)F + \lambda G\|_p < 1.$$

Se recomienda usar el resultado del Ejercicio 110.

Bases de Schauder

115 Ejercicio. Recordar la definición de una base de Hamel. Demostrar que V es un espacio de Banach de dimensión infinita (es decir, V no tiene base finita), entonces V no tiene de Hamel base numerable. Sugerencia: si $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de Hamel, considerar los subespacios $W_m := \ell(b_1, \ldots, b_m)$ y aplicar el teorema de Baire.

116 Definición. Sea V un espacio normado complejo. Una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores en V se llama *base de Schauder* si para cada v en V existe una única sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n b_n - v \right\| = 0.$$

117 Ejercicio. Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder en V. Mostrar que la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es linealmente independiente, esto es, para cada m en $\mathbb{N}$ y cualquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ en $\mathbb{C}$, si

$$\sum_{n=1}^{m} \alpha_n b_n = 0_V,$$

entonces $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$.

118 Ejercicio. Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder en V. Para cada m en $\mathbb{N}$ denotemos por W_m al subespacio generado por $b_1, \ldots, b_m$:

$$W_m := \ell(b_1, \ldots, b_m).$$

Mostrar que el conjunto $\bigcup_{m=1}^{\infty} W_m$ es denso en V.

119 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Mostrar que $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder en $\ell^p(\mathbb{N})$.

120 Ejercicio. Mostrar que la sucesión $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder en $c_0(\mathbb{N})$.

121 Ejercicio. Encontrar una base de Schauder en $c(\mathbb{N})$. Enunciar la respuesta y hacer una demostración completa.

Algunos espacios separables y no separables

122 Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo con una base de Schauder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mostrar que V es separable.

123 Ejercicio. Mostrar que los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$, con $p \in [1, +\infty)$, son separables.

124 Ejercicio. Mostrar que el espacio $c_0(\mathbb{N})$ es separable.

125 Ejercicio. Mostrar que el espacio $c(\mathbb{N})$ es separable.

126 Ejercicio. Sean V un espacio vectorial normado, $\delta > 0$ y S un subconjunto no numerable de V tal que para cualesquier a, b en S, si $a \neq b$, entonces $\|a - b\| \geq \delta$. Demostrar que V no es separable.

127 Ejercicio. Demostrar que el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es no separable.