Álgebras de Banach

problemas para examen

Esta lista de problemas no incluye el estudio especial de las álgebras de Banach conmutativas por medio de la transformada de Gelfand.

Índice

1. Definición de álgebras de Banach

1 Ejercicio. Compare la definición de un álgebra de Banach con la definición de un álgebra compleja. ¿Qué propiedades adicionales tienen álgebras de Banach?

2 Ejercicio. Compare la definición de un álgebra de Banach con la definición de un espacio de Banach. ¿Qué propiedades adicionales tiene un álgebra de Banach?

En los siguientes ejercicios suponemos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con identidad.

3 Ejercicio (continuidad de Lipschitz de la norma, la desigualdad inversa del triángulo)**.** Sean $a, b \in \mathcal{A}$. Demuestre que

$$\big|\, \|a\| - \|b\| \,\big| \le \|a - b\|.$$

4 Ejercicio (continuidad de la norma, por sucesiones)**.** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{A}$ y sea $b \in \mathcal{A}$ tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \|a_n\| = \|b\|$.

5 Ejercicio (cada sucesión convergente es acotada)**.** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $\mathcal{A}$. Demuestre que esta sucesión es acotada, esto es, existe $M \ge 0$ tal que para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple la desigualdad $\|a_n\| \le M$.

6 Ejercicio (continuidad del producto)**.** Sean $a, b \in \mathcal{A}$, $\varepsilon > 0$. Encuentre un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in \mathcal{A}$, si $\|x - a\| < \delta$, $\|y - b\| < \delta$, entonces

$$\|xy - ab\| < \varepsilon.$$

7 Ejercicio (continuidad del producto, por sucesiones)**.** Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathcal{A}$, $v, w \in \mathcal{A}$, tales que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = v, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = w.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = vw.$$

8 Ejercicio. Enunciar y demostrar la continuidad de la adición $(a, b) \mapsto a + b$ y de la multiplicación por escalares, $(\lambda, a) \mapsto \lambda a$.

9 Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{A}$. Definimos $L_a \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mediante la regla

$$L_a(x) \coloneqq ax \qquad (x \in \mathcal{A}).$$

Demuestre que $L_a \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ y $\|L_a\| = \|a\|$.

10 Ejercicio (subálgebra cerrada con identidad de un álgebra de Banach con identidad)**.** Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e y sea $\mathcal{S}$ una subálgebra cerrada de $\mathcal{A}$ tal que $e \in \mathcal{S}$. Muestre que $\mathcal{S}$, dotada de las operaciones restringidas de $\mathcal{A}$ y de la norma restringida de $\mathcal{A}$, es un álgebra de Banach con identidad.

2. Ejemplos de álgebras de Banach

11 Ejercicio. Sea V un espacio de Banach. Muestre que $\mathcal{B}(V)$ es un álgebra de Banach con identidad. En particular, recuerde la definición de la norma en $\mathcal{B}(V)$, demuestre la propiedad submultiplicativa de la norma, encuentre la identidad del álgebra $\mathcal{B}(V)$, y recuerde por qué $\mathcal{B}(V)$ es un espacio completo.

12 Ejercicio. Sea $n \in \mathbb{N}$. Muestre que el conjunto $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de todas las matrices complejas cuadradas de orden n, con las operaciones usuales con la norma de operadores, es un álgebra de Banach con identidad. Muestre que para $n \geq 2$ esta álgebra no es conmutativa.

13 Ejercicio. Sea X un conjunto. Denotemos por $B(X)$ al espacio de las funciones acotadas $X \to \mathbb{C}$, con las operaciones por puntos:

$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) \coloneqq \lambda f(x), \qquad (fg)(x) \coloneqq f(x)g(x).$$

La norma en $B(X)$ se define como

$$\|f\| \coloneqq \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Muestre que $B(X)$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad. En particular, demuestre la propiedad submultiplicativa de la norma, encuentre la identidad del álgebra $B(X)$, y recuerde por qué $B(X)$ es un espacio completo.

14 Ejercicio. Muestre que el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$, con la operación de multiplicación por componentes, es un álgebra de Banach conmutativa con identidad.

15 Ejercicio. Sea X un espacio topológico. Denotemos por $C_b(X)$ al espacio de las funciones continuas acotadas $X \to \mathbb{C}$, con las operaciones y la norma inducidas de $B(X)$. Demuestre que $C_b(X)$ es una subálgebra cerrada de $B(X)$ y contiene la identidad del álgebra $B(X)$.

16 Ejercicio. Sea X un espacio topológico compacto de Hausdorff. Se denota por $C(X)$ el espacio de las funciones continuas $X \to \mathbb{C}$. Explique por qué $C(X)$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad.

17 Ejercicio. Muestre que $\mathbb{C}$, con las operaciones usuales y con la norma definida como el valor absoluto, es un álgebra de Banach conmutativa con identidad.

18 Ejercicio. Muestre que $\mathbb{C}^n$, con las operaciones por componentes y con la norma-máximo, es un álgebra de Banach conmutativa con identidad.

19 Ejercicio (álgebra de convolución sobre los enteros)**.** Para cada a, b en $\ell^1(\mathbb{Z})$, demuestre que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k} b_k| < +\infty \qquad (j \in \mathbb{Z})$$

y

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k} b_k| = \|a\|_1 \|b\|_1.$$

En el espacio $\ell^1(\mathbb{Z})$ definimos la operación $*$ mediante la regla

$$(a * b)_j := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \qquad (j \in \mathbb{Z}).$$

Demuestre que la serie en el lado derecho converge, y que el espacio $\ell^1(\mathbb{Z})$ con esta operación es un álgebra de Banach conmutativa con identidad.

20 Ejercicio (álgebra de convolución finita)**.** Dotamos $\mathbb{C}^n$ de la siguiente operación:

$$(a * b)_j := \sum_{k=0}^{n-1} a_{(j-k) \bmod n} b_k,$$

y de la norma $\|\cdot\|_1$. Muestre que $\mathbb{C}^n$ con esta operación (como multiplicación) y esta norma es un álgebra de Banach conmutativa con identidad.

21 Ejercicio (matrices de Toeplitz triangulares inferiores)**.** Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $a = [a_j]_{j=0}^{n-1}$ pongamos

$$T(a) := \big[a_{j-k}\big]_{j,k=0}^{n-1},$$

donde definimos $a_j = 0$ para $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, n-1\}$. Sea

$$\mathcal{T}_n := \{T(a) \colon\; a \in \mathbb{C}^n\}.$$

Muestre que $\mathcal{T}_n$ es una subálgebra cerrada con identidad del álgebra $\mathcal{M}_n$. Muestre que $\mathcal{T}_n$ es conmutativa.

22 Ejercicio (funciones suaves de cierto orden finito)**.** Sea $m \in \mathbb{N}$. Denotemos por $C^m([0,1])$ al conjunto de las funciones $[0,1] \to \mathbb{C}$ que son continuas en $[0,1]$ y tienen derivadas continuas de orden $1, \ldots, m$ (en los puntos 0 y 1 se trata de las derivadas unilaterales). Pongamos

$$\|a\|_{C^m([0,1])} := \sum_{k=0}^{m} \frac{\|a^{(k)}\|_{\sup}}{k!}.$$

Demuestre que $C^m([0,1])$ con esta norma y con operaciones algebraicas comunes (punto a punto) es un álgebra de Banach conmutativa con identidad. En el sentido algebraico, $C^m([0,1])$ es un subálgebra de $C([0,1])$, pero la norma en $C^m([0,1])$ no coincide con la norma inducida de $C([0,1])$.

23 Ejercicio (el álgebra de convolución incompleta de sucesiones)**.** En el espacio de Banach $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ definimos la operación $*$ mediante la regla

$$(x * y)_n := \sum_{k=0}^{n} x_{n-k} y_k \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Demuestre que $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad.

24 Ejercicio. Supongamos que $\mathcal{A}$ es un álgebra compleja con identidad y con una norma que cumple la siguiente propiedad:

$$\exists M > 0 \qquad \forall a, b \in \mathcal{A} \qquad \|ab\| \le M\|a\|\,\|b\|.$$

Definimos $L\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{A})$,

$$L(a)(b) := ab.$$

Demostrar que L es un homomorfismo de álgebras, y que L es continuo. Definimos $N\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty)$,

$$N(a) := \|L(a)\|.$$

Demostrar que $(\mathcal{A}, N)$ es un álgebra normada, y la norma N es equivalente a la norma original $\|\cdot\|$.

25 Ejercicio (el álgebra del disco)**.** Denotemos por $A(\mathbb{D})$ al conjunto de las funciones que pertenecen a $C(\mathrm{cl}(\mathbb{D}))$ y son holomorfas en $\mathbb{D}$:

$$A(\mathbb{D}) := \{f \in C(\mathrm{cl}(\mathbb{D}))\colon\ f|_{\mathcal{D}} \in H(\mathbb{D})\}.$$

Muestre que $A(\mathbb{D})$ es una subálgebra cerrada con identidad del álgebra $C(\mathrm{cl}(\mathbb{D}))$.

26 Ejercicio. Encuentre un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ con unidad y un elemento x en $\mathcal{A}$ tales que

$$xB(0_{\mathcal{A}}, 1) \neq B(0_{\mathcal{A}}, \|x\|).$$

27 Ejercicio. Encuentre un álgebra de Banach con unidad $\mathcal{A}$ y un elemento x en $\mathcal{A}$ tales que

$$xB(e, 1) \neq B(x, \|x\|).$$

3. Unitización de un álgebra de Banach

28 Ejercicio. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Definimos $\widetilde{\mathcal{A}}$ como el conjunto $\mathcal{A} \times \mathbb{C}$ con las operaciones

$$\begin{aligned}
&(a, \xi) + (b, \eta) := (a + b, \xi + \eta),\\
&\lambda(a, \xi) := (\lambda a, \lambda\xi),\\
&(a, \xi)(b, \eta) := (ab + \eta a + \xi b, \xi\eta),
\end{aligned}$$

y con la norma

$$\|(a, \xi)\| := \|a\| + |\xi|.$$

Demuestre que $\widetilde{\mathcal{A}}$ es un álgebra normada con identidad $\widetilde{e} := (0_{\mathcal{A}}, 1)$.

Este ejercicio es simple, pero es necesario para entender bien y resolver los siguientes ejercicios.

29 Ejercicio. Demuestre que si $\mathcal{A}$ es de Banach, entonces $\widetilde{\mathcal{A}}$ también es de Banach.

30 Ejercicio. Definimos $f\colon \mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$, $f(a) := (a, 0)$. Demuestre que f es un monomorfismo isométrico, $f[\mathcal{A}]$ es un ideal cerrado de $\widetilde{\mathcal{A}}$, y

$$\widetilde{\mathcal{A}} = f[\mathcal{A}] + \mathbb{C}\widetilde{e}.$$

31 Ejercicio. Definimos $g\colon \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$, $g((a,\xi)) := \xi$. Entonces g es un homomorfismo continuo de álgebras normadas, $\|g\| = 1$, y $\ker(g) = f[\mathcal{A}]$.

4. La suma directa acotada de álgebras de Banach

32 Ejercicio. Sea J un conjunto y sea $(\mathcal{A}_j)_{j\in J}$ una familia de álgebras de Banach con identidades e_j. Pongamos

$$\sum_{j\in J} \mathcal{A}_j := \left\{ a \in \prod_{j\in J} \mathcal{A}_j \colon\ \sup_{j\in J} \|a_j\|_{\mathcal{A}_j} < +\infty \right\}.$$

Muestre que $\sum_{j\in J} \mathcal{A}_j$ con las operaciones por componentes y con la norma-supremo es un álgebra de Banach con identidad.

33 Ejercicio. Muestre que $B(X)$ y $\ell^\infty(\mathbb{N})$ se pueden ver como casos particulares de sumas acotadas de álgebras de Banach.

5. El cociente de un álgebra de Banach sobre un ideal cerrado

34 Ejercicio. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e y sea J un ideal bilateral cerrado en $\mathcal{A}$, $J \neq \mathcal{A}$. Denotemos por $\sim$ a la relación binaria

$$a \sim b \qquad a - b \in J.$$

Se sabe que $\sim$ es una relación de equivalencia, que las clases de equivalencia son de la forma $a + J$, y que $\mathcal{A}/J$ es un espacio de Banach (recuerde cómo se define la norma en $\mathcal{A}/J$). Muestre que la relación $\sim$ es congruente con la multiplicación del álgebra:

$$(a_1 \sim a_2) \quad \wedge \quad (b_1 \sim b_2) \quad \Longrightarrow \quad a_1 b_1 \sim a_2 b_2.$$

Esto permite definir la multiplicación en $\mathcal{A}/J$ a través de la multiplicación de representantes. Recuerde todas estas definiciones.

35 Ejercicio. En las condiciones del ejercicio anterior, muestre que $\mathcal{A}/J$ es un álgebra de Banach con identidad. En particular, hay que demostrar la propiedad submultiplicativa de la norma y que

$$\|e + J\|_{\mathcal{A}/J} = 1.$$

6. Elementos invertibles en un álgebra de Banach

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e. Denotamos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{A})$ al conjunto de los elementos invertibles en $\mathcal{A}$. Denotemos por $\operatorname{inv}\colon \operatorname{Inv}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ a la función $\operatorname{inv}(a) := a^{-1}$.

36 Ejercicio. Muestre que $\operatorname{Inv}(\mathcal{A})$ es un grupo.

37 Ejercicio (la serie de von Neumann)**.** Sea $a \in \mathcal{A}$ tal que $\|a\| < 1$. Muestre que $e - a \in \operatorname{Inv}(\mathcal{A})$,

$$(e - a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k,$$

y se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\|(e - a)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|a\|}, \qquad \|(e - a)^{-1} - a\| \le \frac{\|a\|}{1 - \|a\|}.$$

38 Ejercicio. Muestre que $\operatorname{Inv}(\mathcal{A})$ es un conjunto abierto en $\mathcal{A}$.

39 Ejercicio. Muestre que la función inv es continua.

7. El grupo exponencial

En esta sección suponemos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con identidad e.

40 Ejercicio. Para cada a en $\mathcal{A}$, pongamos

$$\exp(a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!},$$

donde $a^0 := e$. Demuestre que esta serie converge.

41 Ejercicio. Demuestre que si $a, b \in \mathcal{A}$ y $ab = ba$, entonces

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

42 Ejercicio. Demuestre que si $\mathcal{A}$ es un álgebra conmutativa con identidad, entonces es conjunto

$$\{\exp(a)\colon\ a \in \mathcal{A}\}$$

es un subgrupo de $\operatorname{Inv}(\mathcal{A})$.

8. Espectro de un elemento en un álgebra de Banach con identidad

En esta sección suponemos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con identidad e. Para cada a en $\mathcal{A}$, denotamos por $\operatorname{Sp}(a)$ el espectro de $\mathcal{A}$:

$$\operatorname{Sp}(\mathcal{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ \lambda e - a \notin \operatorname{Inv}(\mathcal{A})\}.$$

43 Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{A}$. Demuestre que $a \in \operatorname{Inv}(\mathcal{A})$ si, y solo si, $0 \notin \operatorname{Sp}(a)$.

44 Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{A}$. Muestre que la función resolvente $R_a\colon \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(a) \to \mathcal{A}$, definida como

$$R_a(\lambda) := (\lambda e - a)^{-1},$$

es continua.

45 Ejercicio. Demuestre la identidad

$$R_a(\xi) - R_a(\eta) = -(\xi - \eta) R_a(\xi) R_a(\eta).$$

46 Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{A}$. Muestre que la función resolvente es derivable en cada punto:

$$\lim_{\lambda \to \xi} \frac{R_a(\lambda) - R_a(\xi)}{\lambda - \xi} = -R_a(\xi)^2.$$

47 Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{A}$ y sea $\xi \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(a)$. Muestre que la función resolvente es analítica en ξ, esto es, existe un $r > 0$ tal que para cada λ con $|\lambda - \xi| < r$

$$R_a(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \xi)^k (-1)^k R_a(\lambda)^{k+1}.$$

48 Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{A}$. Muestre que si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $|\lambda| > \|a\|$, entonces $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(a)$. Muestre que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|R_a(\lambda)\| = 0.$$

49 Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{A}$. Muestre que $\operatorname{Sp}(a)$ es un conjunto compacto.

50 Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{A}$. Muestre que $\operatorname{Sp}(a) \neq \varnothing$.

51 Ejercicio (Mazur–Gelfand)**.** Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad tal que $\operatorname{Inv}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Muestre que $\mathcal{A} = \mathbb{C}e$.

52 Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{A}$ y sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(a)$. Demustre que

$$a R_a(\lambda) = R_a(\lambda) a.$$

9. El teorema del mapeo del espectro, para funciones polinomiales

En esta sección suponemos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con identidad.

53 Ejercicio. Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ algunos elementos que conmutan a pares. Demostrar que el producto $a_1 \cdots a_n$ es invertible si, y solo si, todos $a_1, \ldots, a_n$ son invertibles.

54 Ejercicio (el teorema del mapeo del espectro, en el caso de polinomios)**.** Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e y sea $a \in \mathcal{A}$. Supongamos que f es un polinomio de una variable. Demostrar que

$$\mathrm{Sp}(f(a)) = f[\mathrm{Sp}(a)].$$

Sugerencia. Dado λ en $\mathbb{C}$, el polinomio $f - \lambda$ se puede factorizar en polinomios de grado uno:

$$f(t) - \lambda = c(t - \xi_1) \ldots (t - \xi_n).$$

55 Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{A}$ tal que $a^2 = a$.

- Demuestre que $\mathrm{Sp}(a) \subseteq \{0, 1\}$.
- Encontrar ejemplos cuando $a^2 = a$ y $\mathrm{Sp}(a) = \{0\}$.
- Encontrar ejemplos cuando $a^2 = a$ y $\mathrm{Sp}(a) = \{1\}$.
- Supongamos que $a^2 = a$ y $a \neq e$. ¿Es cierto que a no es invertible?

10. El radio espectral

En esta sección suponemos que $\mathcal{A}$ es un álgebra con identidad.

56 Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{A}$. Escriba la definición del radio espectral $r(a)$.

57 Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{A}$. Demuestre que

$$r(a) \leq \|a\|.$$

58 Ejercicio. Sean $a, b \in \mathcal{A}$ tales que $e - ab \in \operatorname{Inv}(\mathcal{A})$. Demuestre que $e - ba \in \operatorname{Inv}(\mathcal{A})$.

59 Ejercicio. Sean $a, b \in \mathcal{A}$. Demuestre que $\operatorname{Sp}(ab) \cup \{0\} = \operatorname{Sp}(ba) \cup \{0\}$.

60 Ejercicio. Sean $a, b \in \mathcal{A}$. Demuestre que $r(ab) = r(ba)$.

61 Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{A}$ y sea $n \in \mathbb{N}_0$. Demuestre que

$$r(a^n) = r(a)^n.$$

62 Ejercicio. Enuncie y demuestre la fórmula de Gelfand–Beurling para el radio espectral.

11. La invertibilidad y el espectro en subálgebras

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e y sea $\mathcal{S}$ una subálgebra cerrada de $\mathcal{A}$ tal que $e \in \mathcal{S}$.

63 Ejercicio. Muestre que

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{S}) \subseteq \operatorname{Inv}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{S}.$$

12. Descripción de la invertibilidad en varias álgebras de Banach

64 Ejercicio. Recuerde una demostración del teorema que

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{M}_n) = \{A \in \mathcal{M}_n : \ \det(A) \neq 0\}.$$

Haga un análisis de invertibilidad para varias álgebras de Banach que vimos.

65 Ejercicio (invertibilidad en el álgebra de funciones acotadas)**.** Encuentre $\operatorname{Inv}(B(X))$, donde X es un conjunto. Si $f \in B(X)$, encuentre $\operatorname{Sp}(f)$.

66 Ejercicio (invertibilidad en el álgebra de sucesiones acotadas)**.** Encuentre $\operatorname{Inv}(\ell^\infty(\mathbb{N}))$. Si $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, encuentre $\operatorname{Sp}(a)$.

67 Ejercicio (el operador de multiplicación con desplazamiento)**.** Sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Demuestre que hay un único operador acotado $T\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ tal que

$$T(e_k) = a_k e_{k+1} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Encuentre el espectro de T.